BAB 2

Distribusi Khusus

Mempelajari distribusi resiko untuk memprediksikan harga premi asuransi

PREDIKSI PENENTUAN JENIS KELAMIN PADA CALON BAYI

- Variabel x merupakan variabel random jika nilainya berhubungan dengan kejadian random
- *pdf=probability densitas function*, dinotasikan

$$f(x) = P(X = x)$$

merupakan probabilitas variabel *X* di nilai x.

- *cdf=cumulatif densitas function*, dinotasikan

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{X \le x} f(x)$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

merupakan probabilitas variabel *X* mengambil nilai x atau lebih kecil dari x.

SIFAT FUNGSI PROBABILITAS:

- X Diskrit

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\sum f(x) = 1$$

- Rata-rata (expected value) variabel random diskrit *x* dengan distribusi probabilitas *f(x)* :

$$E(X) = \sum x \, f(x)$$

- Variansi variabel random *x* dengan distribusi probabilitas *f(x)* dirumuskan :

$$Var(X) = E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum (x-\mu)^2 \, f(x)$$

CONTOH SOAL

1. Dalam pelemparan 2 koin dengan permukaan H dan T. Jika x adalah kejadian munculnya permukaan H maka tentukan distribusi probabilitas untuk x !
2. Variabel X diskrit ; 0, 1, 2, 3, 4 dengan pdf

$$f(x) = \frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

   Tentukan distribusi probabilitasnya (pdf dan cdfnya) !

Distribusi Bernoulli

$$P(X = x; p) = p^x (1 - p)^{1-x},$$

dengan $x = 0, 1$ (gagal, sukses) dan p adalah peluang mendapatkan hasil sukses.

Sifat-sifat Eksperimen Bernoulli

- tiap usaha (*trial*) menghasilkan satu dari dua hasil yang mungkin, dinamakan sukses (S) dan gagal (G);
- peluang sukses, $P(S) = p$ dan peluang gagal $P(G) = 1 - p$, atau $P(G) = q$;
- usaha-usaha tersebut independen

DISTRIBUSI BINOMIAL

Pdf:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

Suatu eksperimen dikatakan terdiri dari n trial Bernoulli jika :

1. Trial saling indepeden
2. Setiap trial memuat dua kemungkinan yaitu ya atau tidak, sukses atau gagal
3. Probabilitas sukses dinotasikan dengan p

If X is a binomial random variable with parameters p and n,

$$\mu = E(X) = np \qquad \text{and} \qquad \sigma^2 = V(X) = np(1-p)$$

CONTOH

Setiap sampel air yang diambil mempunyai kemungkinan 10% mengandung polutan organik. Asumsikan sampel saling independen maka tentukan probabilitas pada 18 sampel yang diambil terdapat tepat 2 sampel berisi polutan!

$$P(X=2)=\binom{18}{2}(0.1)^2(0.9)^{16}$$

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Sifat-sifat:

- Dalam populasi berukuran N sebanyak k dinamakan sukses sedangkan sisanya $N-k$ dinamakan gagal
- sampel berukuran n diambil dari N benda
- Cara pengambilan sampel tanpa pengembalian

Distribusi peluang:

$$P(X=x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x=0,1,2,\ldots,\min(n,k)$$

Mean dan Variansi:

$\mathrm{E}(X)=n\frac{k}{N}$; $\qquad \mathrm{Var}(X)=n\frac{k}{n}\frac{N-k}{N}\frac{N-n}{N-1}$

CONTOH

Suatu kotak berisi 40 suku cadang dengan 3 rusak. Sampel berukuran 5 diambil sekaligus dari kotak. Pengambilan sampel ini adalah suatu eksperimen hipergeometrik dengan X adalah banyaknya suku cadang rusak, $N = 40$, $n = 5$ dan $k = 3$ dengan distribusi peluang:

Peluang ditemukan satu suku cadang rusak dalam pengambilan sampel tersebut

Penyelesaian:

$$P(X = x; 40, 5, 3) = \frac{\binom{3}{x}\binom{37}{5-x}}{\binom{40}{5}}, \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X = 1; 40, 5, 3) \quad = \quad \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0,3011$$

DISTRIBUSI POISSON

Variabel random X Poisson dengan parameter λ>0 dan fungsi densitas probabilitas (pdf=probability density function) / pmf =*probability mass function :*

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0,1,2,\ldots$$

$$\text{rata - rata} = \mu = \mathrm{E}\left[X\right] = \lambda$$

$$\text{variansi} = \sigma^{2} = V\left(X\right) = \lambda$$

SIFAT VARIABEL RANDOM POISSON

- banyaknya sukses terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tidak terpengaruh (bebas) dari apa yang terjadi pada interval waktu atau daerah yang lain,
- peluang terjadinya sukses dalam interval waktu yang singkat atau daerah yang sempit sebanding dengan panjang interval waktu, atau luas daerah dan tidak tergantung pada banyaknya sukses yang terjadi di luar interval waktu atau daerah tersebut,
- peluang terjadinya lebih dari satu sukses dalam interval waktu yang singkat atau daerah yang sempit tersebut dapat diabaikan.

Contoh

Kerusakan pada kabel tembaga berdistribusi Poisson dengan rata-rata 2.3 kerusakan per-mm. Tentukan probabilitas tepat 2 kerusakan dalam 1 mm kabel?

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{e^{-2.3}(2.3)^2}{2!} = 0.265$$

DISTRIBUSI NORMAL (GAUSSIAN)

- Data yang digunakan harus mengikuti distribusi Normal, Mengapa?
- Suatu eksperimen random yang diulang maka variabel random akan sama dengan total replikasi akan berkecenderungan mengikuti distribusi Normal → Teorema De Moivre → Teorema Limit Tengah (dipelajari di STATMAT 1)

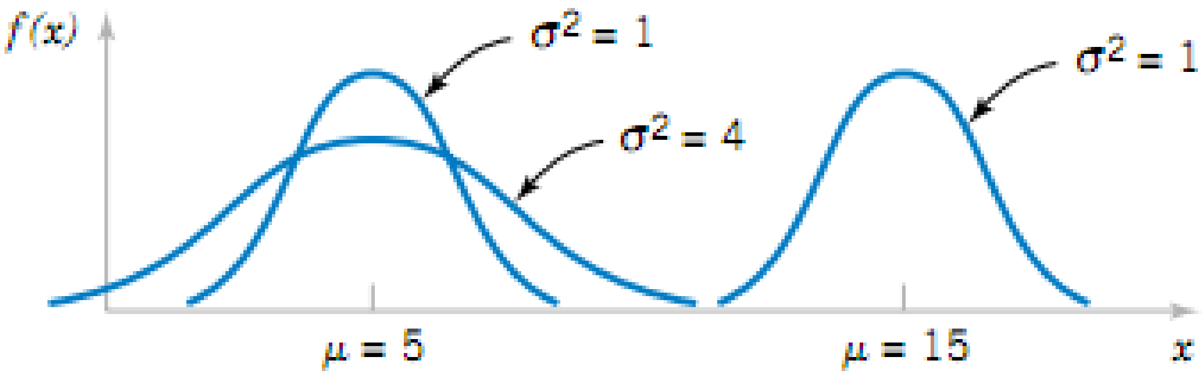


Figure 4-10 Normal probability density functions for selected values of the parameters μ and σ^2.

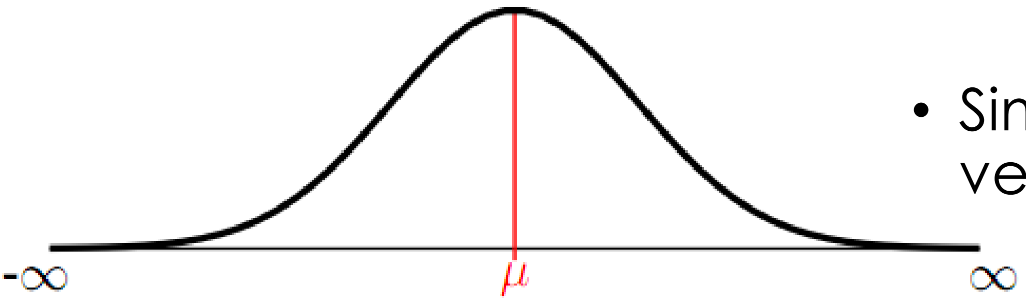
- Suatu variabel random mempunyai distribusi Normal jika pdfnya berbentuk :

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty \quad \text{dan} \quad 0 < \sigma < \infty$$

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

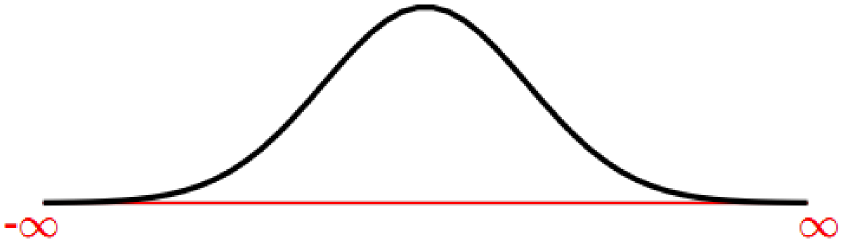
Sifat 1



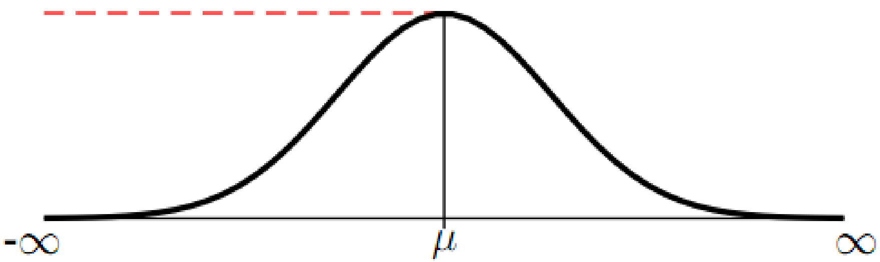
- Simetri terhadap sumbu vertikal melalui μ

SIFAT 3

SIFAT 2

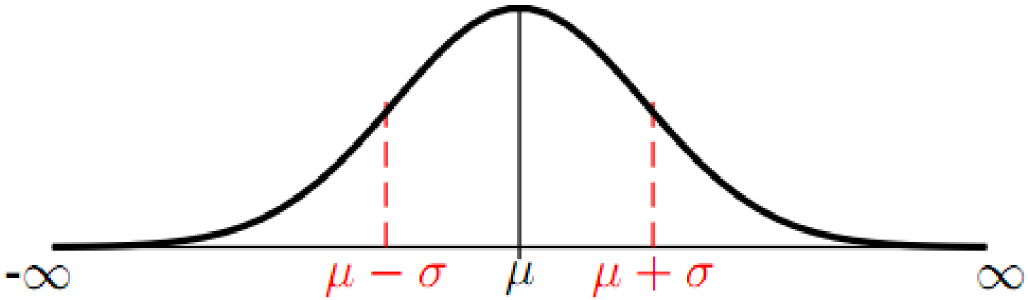


- Memotong sumbu mendatar (sumbu x) secara asimtotis



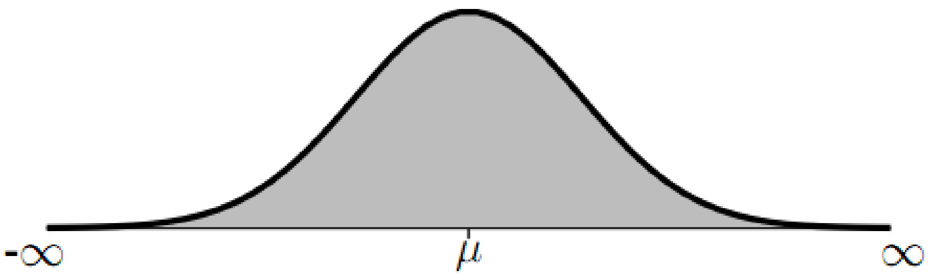
- Harga maksimum terletak pada x=μ

SIFAT 4



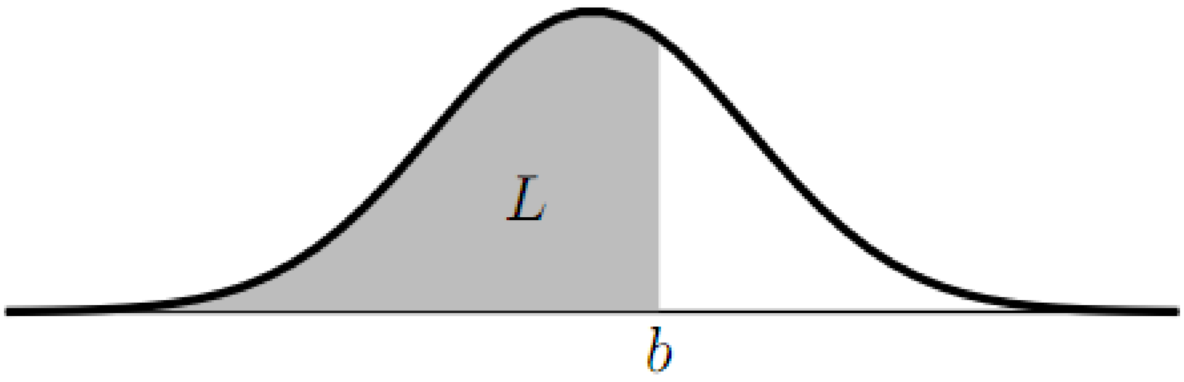
- Mempunyai titik belok pada x=μ±σ

SIFAT 5



- Luas kurva Normal sama dengan 1

MENGHITUNG LUASAN DI BAWAH KURVA NORMAL



$$L = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Dapat dihitung menggunakan tabel Normal Standar dengan terlebih dahulu mentransformasikan skala $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ke $Z \sim N(0, 1)$,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

PDF NORMAL STANDAR

$$\text{Jika } z = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ maka } \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < \infty, Z \sim N(0,1)$$

A normal random variable with

$$\mu = 0 \quad \text{and} \quad \sigma^2 = 1$$

is called a **standard normal random variable** and is denoted as Z.

The cumulative distribution function of a standard normal random variable is denoted as

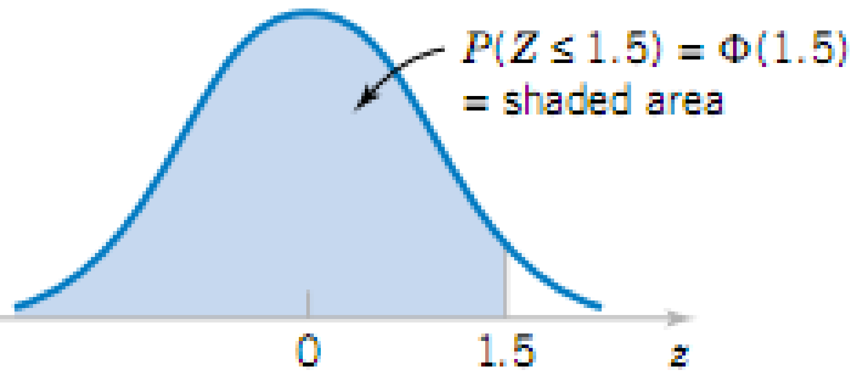
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

CTH

$$\Phi(z) = P(Z \le z)$$

Misal

$$P(Z \le 1.5) = \Phi(1.5)$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03
0	0.50000	0.50399	0.50398	0.51197
⋮		⋮		
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699

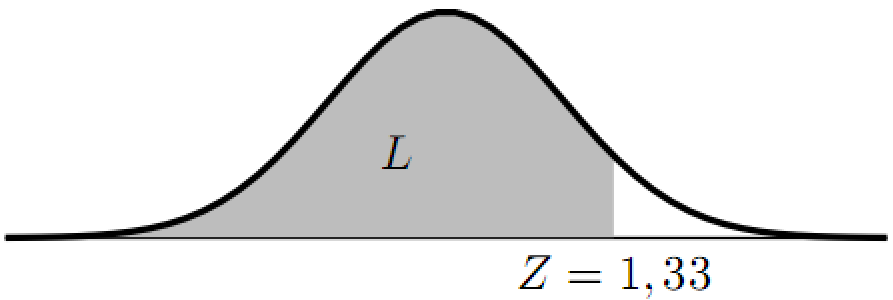
CTH

Distribusi Normal dengan mean $\mu = 60$ dan deviasi standar $\sigma = 12$, $N(60, 12^2)$

Hitunglah luas kurva Normal mulai ekor paling kiri $(-\infty)$ sampai 76

transformasi dari X ke Z,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ &= \frac{76 - 60}{12} \\ &= 1,33 \end{aligned}$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.532922
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.736653	0.738914	0.742154	0.745373
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855

CTH

Distribusi Normal dengan mean $\mu = 60$ dan deviasi standar $\sigma = 12$, $N(60, 12^2)$

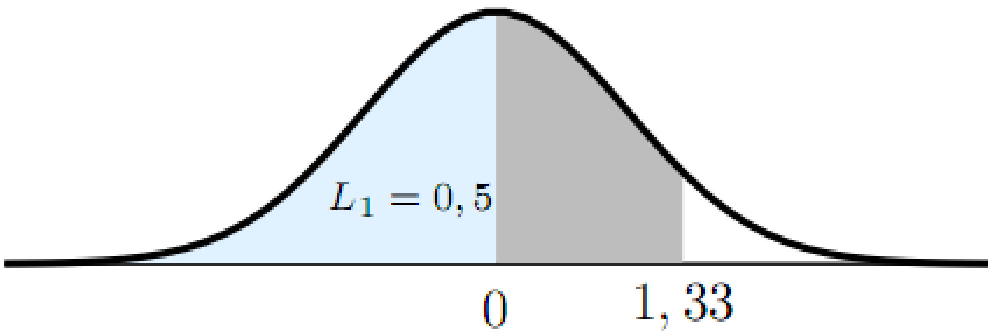
Hitunglah luas kurva Normal antara 60 sampai 76

transformasi dari $X = 60$ ke Z,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 60}{12} = 0$$

transformasi dari $X = 76$ ke Z,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{76 - 60}{12} = 1,33$$



$$P[60 < X < 76] = P(Z \leq 76) - P(Z \leq 60)$$

$$= \Phi(1.33) - \Phi(0)$$

$$= 0.9082 - 0.5$$

$$= 0.4082$$