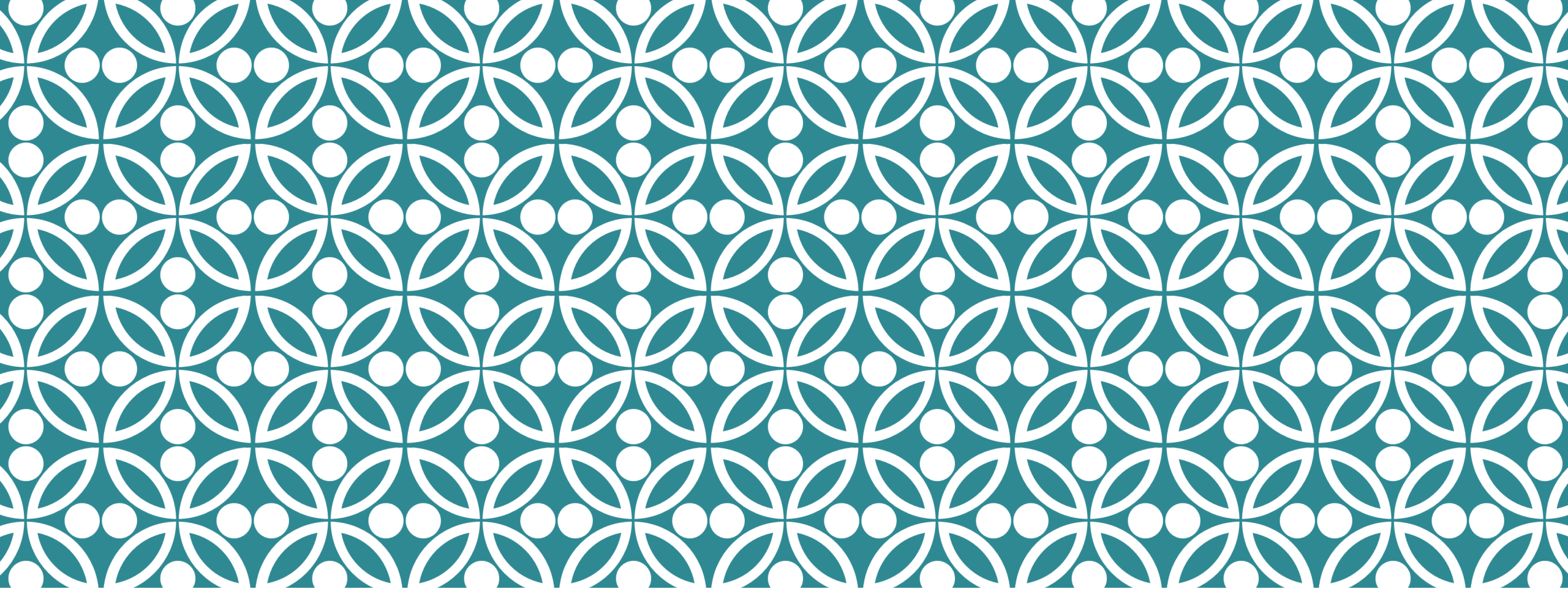




BAB 2

JOINT DISTRIBUTION part 2

VR INDEPENDEN

Contoh

		x_2			$f_1(x_1)$
		0	1	2	
x_1	0	0.1	0.2	0.1	0.4
	1	0.1	0.2	0.1	0.4
	2	0.1	0.1	0.0	0.2
$f_2(x_2)$		0.3	0.5	0.2	



$$\begin{aligned}f(1,1) &= 0.2, \\f_1(1) &= 0.4, \quad f_2(1) = 0.5 \Rightarrow f_1(1)f_2(1) = 0.2 \\f(1,1) &= f_1(1)f_2(1)\end{aligned}$$



kejadian $[X_1 = 1]$ dan $[X_2 = 1]$ saling independen

DEFINISI VR INDEPENDEN

variabel random $X_1, X_2, \dots, X_k$ dikatakan saling independen jika untuk setiap $a_i < b_i$,

$$P[a_i \leq X_i \leq b_i, \dots, a_k \leq X_k \leq b_k] = \prod_{i=1}^k P[a_i \leq X_i \leq b_i]$$

TEOREMA

variabel random $X_1, X_2, \dots, X_k$ saling independen jhj

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = F(x_1)F(x_2) \dots F(x_k)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_k(x_k)$$

TEOREMA

Dua variabel random X_1 dan X_2 dengan $f(x_1, x_2)$ saling independen jhj

1. $\{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) > 0\}$ adalah produk kartesian $A \times B$
2. Pdf gabungan x_1 dan x_2 dapat dinyatakan $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$

contoh

1. $f(x_1, x_2) = 8x_1x_2, \quad 0 < x_1 < x_2 < 1$
2. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$
3. $X, Y \sim GEO(p)$
 - a. $f_{X,Y}(x, y)$
 - b. $f_{X,T}(x, t), \quad T = X + Y$

DEFINISI PDF BERSYARAT

Jika X_1, X_2 vr diskrit atau kontinu dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ maka pdf bersyarat X_2 dengan syarat $X_1 = x_1$ didefinisikan :

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$

untuk nilai $x_1 \ni f_1(x_1) > 0$ dan 0 untuk nilai yang lain

TH

Jika X_1 dan X_2 vr dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ dan pdf marginal $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ maka :

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f(x_2|x_1) = f_2(x_2) f(x_1|x_2)$$

jika X_1 dan X_2 independen maka

$$f(x_2|x_1) = f_2(x_2)$$

$$f(x_1|x_2) = f_1(x_1)$$

CONTOH

1. $f(x, y) = x + y, 0 < x < 1, 0 < y < 1$

a. $f(y|x)$

b. $P[0 < Y < 0.5 | X = 0.25]$

2. $X, Y \sim GEO(p)$

$$f_{U|X}(u|x)$$

Jika $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ dan jika $Y = u(X_1, X_2, \dots, X_k)$ adalah fungsi $\mathbf{X}$ maka

$$E(Y) = E_X[u(X_1, X_2, \dots, X_k)] = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_k} u(x_1, x_2, \dots, x_k) f(x_1, x_2, \dots, x_k), \mathbf{X} \text{ diskrit}$$

$$E(Y) = E_X[u(X_1, X_2, \dots, X_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, \dots, x_k) f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k, \mathbf{X} \text{ kontinu}$$

Jika X_1 dan X_2 vR dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ maka

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

Jika X_1 dan X_2 vR independen dan $g(x), h(y)$ fungsi maka $E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$

DEFINISI

kovariansi dari pasangan vr X dan Y didefinisikan :

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

teorema

Jika X dan Y vr maka :

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$\text{Cov}(X, Y) = 0$ jika X dan Y independen

If X and Y are random variables and a and b are constants, then

$$\text{Cov}(aX, bY) = ab \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X + a, Y + b) = \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X, aX + b) = a \text{Var}(X)$$

Jika X_1 dan X_2 vr dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ maka :

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2)$, jika X_1, X_2 independen

DEF

Jika X dan Y vr berdistribusi gabungan maka ekspektasi bersyarat Y dengan syarat $X = x$ maka :

$$E(Y|x) = \sum_y y f(y|x), \quad X \text{ dan } Y \text{ diskrit}$$

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy, \quad X \text{ dan } Y \text{ kontinu}$$

Contoh 4.5.2

$$f(y|x) = \frac{2}{x}, \quad 0 < y < \frac{x}{2}$$

TH

Jika X dan Y vr berdistribusi gabungan maka $E[E(Y|x)] = E(Y)$

Jika X dan Y vr independen maka $E(Y|x) = E(Y)$ dan $E(X|y) = E(X)$

DEFINISI

Variansi Y dengan syarat $X = x$ diberikan :

$$Var(Y|x) = E\{[Y - E(Y|x)]^2 | x\}$$

TEOREMA

Jika X dan Y merupakan vR berdistribusi gabungan maka :

$$Var(Y) = E_x [Var(Y|X) + Var_x [E(Y|X)]]$$

LATIHAN BUKU BAIN

1. no 9 hal 166 ; b, e
2. no 21 hal 168; c, d,
3. no 3 hal 189; a