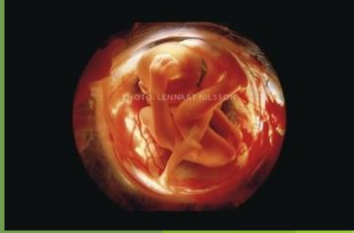
DISTRIBUSI KHUSUS

BAB 1

Pertemuan ketiga

Distribusi probabilitas Variabel Random diskrit

Distribusi Bernoulli



- 2 kemungkinan kejadian

$$X(e)=\begin{cases}1, e\in E\\ 0, e\notin E'\end{cases}$$

- Kejadian saling independen
- Jika X adalah vR dengan dua kemungkinan (misal Sukses/ E dan gagal / E') adalah konstan, f(0)=q, f(1)=p
- Pdf dari X, $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$f(x,p)=p^x q^{1-x}, x=0,1$$

- Rata-rata dan variansi

$$E[X]=p$$
$$Var(X)=pq$$

Distribusi Binomial

- Jika terdapat barisan percobaan independen Bernoulli → distribusi Binomial, $X \sim BIN(n, p)$
- Pdf-nya

$$f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n$$

- jika a dan b konstan maka ekspansi Binomial

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Jika $X \sim BIN(n, p)$ maka

1. $E[X] = np,$
2. $V(X) = npq,$
3. $M_X(t) = (pe^t + q)^n$

contoh

Setiap sampel air kemungkinan 10% berisi polutan organic. Diasumsikan sampel saling independen maka tentukan probabilitas pada 18 sampel yang diambil tepat berisi 2 yang berisi polutan.

Penyelesaian:
Misal X=jumlah sampel berisi polutan
n=18
→ X adalah vR binomial rV dengan p=0.1 dan n=18

$$P(X=2)=\binom{18}{2}(0.1)^2(0.9)^{16}$$

Distribusi Hipergeometrik

- Himpunan N objek berisi K objek sukses, N-K objek gagal
- Dipilh n sampel secara random (tanpa pengembalian) dari N
- X: jumlah sukses dalam sampel dan merupakan vR hipergeometrik dg pdf dan berparameter N, K, n:

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$K \le N, n \le N$$

$$x = \text{maks}\{0, n + K - n\} \text{dan } \min\{K, n\}$$

$$\text{rata} - \text{rata}, \mu = E(X) = np$$

$$\text{variansi}, V(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

contoh

Suatu kotak berisi 100 tabung dari supplier A dan 200 tabung dari supplier B. Jika 4 tabung dipilih secara random dan tanpa dikembalikan maka berapa probabilitas tabung yang terambil keseluruhan berasal dari supplier A?

Penyelesaian:

Misalkan X: sampel tabung yang berasal dari supplier A, maka X berdistribusi Hipergeometrik

N=300, N-K=200
K=100
n=4
x=4

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{100}{4}\binom{200}{0}}{\binom{300}{4}} = 0.0119$$

Distribusi Geometrik

Disebut juga dengan distribusi Pascal

Definisi

- Merupakan distribusi pengembangan dari percobaan Bernoulli dengan probabilitas sukses p
- Maka X menyatakan percobaan sampai mendapatkan sukses pertama
- $0<p<1$
- Bentuk pdf:

$$f(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad x = 1,2,\ldots$$

$$\mu = E[X] = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Distribusi Negatif Binomial

- Merupakan distribusi pengembangan dari percobaan Bernoulli dengan probabilitas sukses p
- Maka X menyatakan percobaan sampai mendapatkan r sukses
- $0<p<1$
- $r=1,2,3\ldots$
- Bentuk pdf:

$$f(x)=\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^{r},\quad x=r,r+1,r+2,\ldots$$

$$\mu=E[X]=\frac{r}{p}$$

$$\sigma^{2}=V(X)=\frac{r(1-p)}{p^{2}}$$

Distribusi Uniform diskrit

- vR X dikatakan berdistribusi uniform diskrit jika setiap n nilai dalam x bernilai probabilitas sama
- Bentuk pdf:

$$f(x_i) = \frac{1}{n}$$

Misal X vR uniform diskrit dengan nilai $a, a+1, a+2, \ldots, b$ dan $a \le b$

$$\mu = E[X] = \frac{b+a}{2}$$

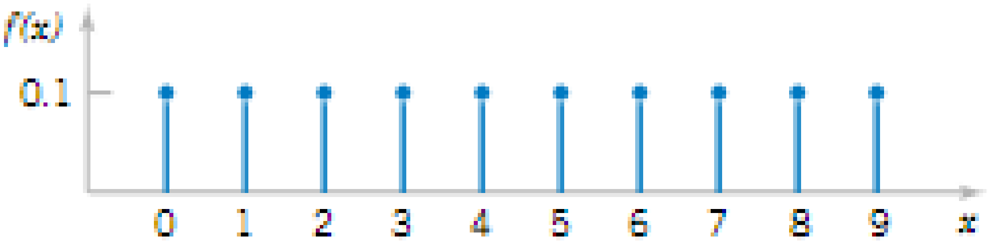
$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

contoh

Digit pada suatu serial number adalah kejadian equally likely dengan angka 0 sampai 9. jika X adalah digit pertama pada serial number maka X adalah vR berdistribusi uniform diskrit dengan probabilitas 0.1

R={0,1,…9} → f(x)=0.1 setiap digit dalam R

Gambar pdfnya



Distribusi POISSON

- Misal suatu even terjadi dalam interval bernilai Riil. Jika interval dapat dipartisi dalam subinterval sedemikian sehingga

1. Probabilitas lebih dari satu kejadian dalam subinterval adalah nol
2. Probabilitas satu kejadian dalam subinterval adalah sama untuk seluruh subinterval dan proporsional terhadap panjang subinterval
3. Kejadian dalam tiap subinterval independen dan random maka kejadian tersebut adalah proses Poisson

vR Poisson adalah jumlah dari kejadian dalam interval dengan parameter λ dengan pdf, rata-rata dan variansi:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$\mu = E[X] = \lambda$$

$$\sigma^{2} = V(X) = \lambda$$