Sifat-sifat Nilai Harapan

BAB 1

Th 2.4.1

jika X adalah vR dengan pdf $f(x)$ dan $u(x)$ fungsi bernilai riil dg $x \in X$

maka

$$E[u(X)] = \begin{cases} \sum_x u(x) f(x), & X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x), & X \text{ kontinu} \end{cases}$$

Jika c sebarang konstanta maka

$$E[c(X)] = cE[X]$$

Jika X dan Y sebarang vR maka

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Jika X dan Y vR yang saling independen maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Th 2.4.2

jika X adalah vR dengan pdf $f(x)$, a dan b konstan. $g(x), h(x)$ fungsi bernilai riil dg $x \in X$

maka

$$E[ag(X) + bh(X)] = aE[g(X)] + bE[h(X)]$$

Contoh 1

Misal dua koin saling independen dilempar dengan probabilitas muncul muka kepala adalah ¾ dan didefinisikan X adalah jumlah muka kepala dg pdf:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^2, x = 0 \\ 2.\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{3}{4}\right), x = 1 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2, x = 2 \end{cases}$$

Nilai harapan E[X]

$$E[X] = (0)\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (1)2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + (2)\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

Variansi. Definisi 2.4.1

- Variansi dari vR X didefinisikan :

$$\operatorname{var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

- Standar deviasi dari X :

$$\sigma_x = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$$

Th. 2.4.3 Variansi juga dapat dinyatakan:

$$\operatorname{var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2$$

Th. 2.4.4

Jika X adalah vR, a dan b konstan maka

$$\operatorname{var}(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Contoh 2

$$f(x) = \begin{cases} 1/9, x \text{ bilangan bulat dalam range } [-4,4] \\ 0, x \text{ yg lain} \end{cases}$$

Nilai harapan

$$E[X] = \sum_{x=-4}^{4} x f(x)$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{x=-4}^{4} x = \frac{1}{9}(-4 + -3 + -2 + -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4) = 0$$

variansi

$$\mathrm{var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[(X - 0)^2\right] = E\left[X^2\right]$$

$$= \sum_{-4}^{4} x^2 f(x) = 0 + 1.\frac{2}{9} + 4.\frac{2}{9} + 9.\frac{2}{9} + 16.\frac{2}{9} = \frac{60}{9}$$

Def 2.4.2

Momen ke-k terhadap pusat dari suatu vR X didefinisikan

$$\mu_k^{'} = E\left[X^k\right]$$

Momen ke-k terhadap rata-rata (momen sentral ke-k) didefinisikan :

$$\mu_k = E[X - E[X]]^k = E[X - \mu]^k$$

contoh

$$\mu_1 = E[X - E[X]]^1 = E[X - \mu] = E(X) - \mu = 0$$

$$\mu_2 = E[X - E[X]]^2 = E[X - \mu]^2 = \sigma^2$$

Batas probabilitas. Th. 2.4.6

- Jika X vR dan u(x) adalah fungsi bernilai riil nonnegatif maka untuk sebarang konstanta positif c>0

$$P[u(X \geq c)] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$$

- Misal r>0 $A = \{x \mid u(x) \geqslant c\}$

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\, dx$$
$$= \int_A u(x) f(x)\, dx + \int_{A^c} u(x) f(x)\, dx$$
$$\geqslant \int_A u(x) f(x)\, dx$$
$$\geqslant \int_A c f(x)\, dx$$
$$= cP[X \in A]$$

untuk $u(x) = |x|^r$,

$$P[|X| \geqslant c] \leqslant \frac{E(|X|^r)}{c^r}$$

$\Downarrow$

Ketidaksamaan Markov

Ketidaksamaan Chebysev

Jika X vR dengan rata - rata μ dan variansi $\sigma^2, k > 0$

$$P\left[|X-\mu| \geq k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

bukti:

misal $u(X) = (X-\mu)^2, c = k^2\sigma^2$

maka mengg. th 2.4.6

$$P\left[(X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2\right] \leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2\sigma^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Bentuk lain:

$$P[|X-\mu| < k\sigma] \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}$$

misal $\varepsilon = k\sigma$,

$$P[|X-\mu| < \varepsilon] \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

dan

$$P[|X-\mu| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

MGF (moment generating function/ Fungsi Pembangkit Momen)

Jika X vR maka nilai harapan $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$

Disebut dengan mgf jika nilai harapannya ada untuk setiap nilai t, $-h < t < h, h > 0$

Sifat:

Jika $Y = aX + b$, maka $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$.

BUKTI:

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\
&= E(e^{t(aX+b)}) \\
&= E(e^{atX} e^{bt}) \\
&= e^{bt} E(e^{atX}) \\
&= e^{bt} M_X(at)
\end{aligned}
$$

Th 2.5.1

Jika mgf dari X ada maka berlaku

$$E\left[X^r\right] = M_X^r(0), \quad r = 1, 2, \ldots$$

FMGF

Momen faktorial ke r dari variabel random X

$$E\left[X\left(X-1\right)\cdots\left(X-r+1\right)\right]$$

Faktorial fungsi pembangkit momen (FMGF) dari variabel random X

$$G_X\left(t\right)=E\left(t^X\right)$$

jika nilai harapannya ada untuk $1-h<t<1+h$

Th 2.5.4

Jika X mempunyai FMGF maka

$$G_X'\left(1\right)=E\left[X\right]$$

$$G_X''\left(1\right)=E\left[X\left(X-1\right)\right]$$

$$G_X^{(r)}\left(1\right)=E\left[X\left(X-1\right)\cdots\left(X-r+1\right)\right]$$

Latihan 1

1. Gambar cdf dari

$$F(x)=\begin{cases}0, -\infty < x < 0\\ \frac{1}{4}, 0 \le x < 1\\ \frac{3}{4}, 1 \le x < 2\\ 1, 2 \le x < \infty\end{cases}$$

2. Jika diketahui

$$f(x)=\begin{cases}cx^2, 0 < x < 3\\ 0, x \text{ yang lain}\end{cases}$$

maka a. Tentukan c

b. Berapakah nilai $P(1 < X < 2)$

3. Jika vR X kontinu mempunyai pdf

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x > 0\\ 0, x \le 0\end{cases}$$

Maka tentukan

a. E[X]

b. Var(X)