

Sifat-sifat Nilai Harapan

BAB 1

Th 2.4.1

jika X adalah vR dengan pdf $f(x)$ dan $u(x)$ fungsi bernilai riil dg $x \in X$
maka

$$E[u(X)] = \begin{cases} \sum u(x) f(x), & X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x), & X \text{ kontinu} \end{cases}$$

Jika c sebarang konstanta maka

$$E[c(X)] = cE[X]$$

Jika X dan Y sebarang vR maka

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Jika X dan Y vR yang saling independen maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Th 2.4.2

jika X adalah vR dengan pdf $f(x)$, a dan b konstan, $g(x)$, $h(x)$ fungsi bernilai riil dg $x \in X$
maka

$$E[ag(X) + bh(X)] = aE[g(X)] + bE[h(X)]$$

Contoh 1

Misal dua koin saling independen dilempar dengan probabilitas muncul muka kepala adalah $\frac{3}{4}$ dan didefinisikan X adalah jumlah muka kepala dg pdf:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^2, & x = 0 \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right), & x = 1 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2, & x = 2 \end{cases}$$

Nilai harapan $E[X]$

$$\begin{aligned} E[X] &= (0) \left(\frac{1}{4}\right)^2 + (1) 2 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right) + (2) \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Variansi. Definisi 2.4.1

- Variansi dari vR X didefinisikan :

$$\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

- Standar deviasi dari X :

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var}(X)}$$

Th. 2.4.3 Variansi juga dapat dinyatakan:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Th. 2.4.4

Jika X adalah vR, a dan b konstan maka

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Contoh 2

$$f(x) = \begin{cases} 1/9, & x \text{ bilangan bulat dalam range } [-4, 4] \\ 0, & x \text{ yg lain} \end{cases}$$

Nilai harapan

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=-4}^4 x f(x) \\ &= \frac{1}{9} \sum_{x=-4}^4 x = \frac{1}{9} (-4 + -3 + -2 + -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4) = 0 \end{aligned}$$

variansi

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E[(X - E[X])^2] = E[(X - 0)^2] = E[X^2] \\ &= \sum_{-4}^4 x^2 f(x) = 0 + 1 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} + 9 \cdot \frac{2}{9} + 16 \cdot \frac{2}{9} = \frac{60}{9} \end{aligned}$$

Def 2.4.2

Momen ke-k terhadap pusat dari suatu vR X didefinisikan

$$\mu'_k = E[X^k]$$

Momen ke-k terhadap rata-rata (momen sentral ke-k) didefinisikan :

$$\mu_k = E[X - E[X]]^k = E[X - \mu]^k$$

contoh

$$\mu_1 = E[X - E[X]]^1 = E[X - \mu] = E(X) - \mu = 0$$

$$\mu_2 = E[X - E[X]]^2 = E[X - \mu]^2 = \sigma^2$$

Batas probabilitas. Th. 2.4.6

- Jika $X \in \mathbb{R}$ dan $u(x)$ adalah fungsi bernilai riil nonnegative maka untuk sebarang konstanta positif $c > 0$

$$P[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$$

- Misal
 $c > 0 \quad A = \{x \mid u(x) \geq c\}$

$$\begin{aligned} E[u(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx \\ &= \int_A u(x) f(x) dx + \int_{A^c} u(x) f(x) dx \\ &\geq \int_A u(x) f(x) dx \\ &\geq \int_A c f(x) dx \\ &= cP[X \in A] \end{aligned}$$

untuk
 $u(x) = |x|^r$

$$P[|X| \geq c] \leq \frac{E[|X|^r]}{c^r}$$



Ketidaksamaan Markov

Ketidaksamaan Chebysev

Jika X vR dengan rata - rata μ dan variansi $\sigma^2, k > 0$

$$P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

bukti:

$$\text{misal } u(X) = (X - \mu)^2, c = k^2\sigma^2$$

maka mengg. th 2.4.6

$$P[(X - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2] \leq \frac{E(X - \mu)^2}{k^2\sigma^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Bentuk lain:

$$P[|X - \mu| < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\text{misal } \varepsilon = k\sigma,$$

$$P[|X - \mu| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

dan

$$P[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

MGF (moment generating function/ Fungsi Pembangkit Momen)

Jika X vR maka nilai harapan $M_X(t) = E[e^{tX}]$

Disebut dengan mgf jika nilai harapannya ada untuk setiap nilai t , $-h < t < h, h > 0$

Sifat:

Jika $Y = aX + b$, maka $M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$.

BUKTI:

$$\begin{aligned}M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\&= E(e^{t(aX+b)}) \\&= E(e^{atX}e^{bt}) \\&= e^{bt}E(e^{atX}) \\&= e^{bt}M_X(at)\end{aligned}$$

FMGF

Momen faktorial ke r dari variabel random X

$$E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$$

Faktorial fungsi pembangkit momen (FMGF) dari variabel random X

$$G_X(t) = E(t^X)$$

jika nilai harapannya ada untuk $1-h < t < 1+h$

Latihan 1

1. Gambar cdf dari

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

2. Jika diketahui

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$$

maka a. Tentukan c

b. Berapakah nilai $P(1 < X < 2)$

3. Jika vR X kontinu mempunyai pdf

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Maka tentukan

a. $E[X]$

b. $\text{Var}(X)$