Bab 2

Distribusi Gabungan
(Joint Distribution)

Definisi pdf gabungan diskrit

- Pdf gabungan dari vr diskrit berdimensi k didefinisikan :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k]$$

untuk semua nilai x yg mungkin, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$

- Contoh 4.2.1

$$f(x_1, x_2) = \frac{\binom{400}{x_1}\binom{400}{x_2}\binom{200}{10 - x_1 - x_2}}{\binom{1000}{10}}$$

teorema

Fungsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ adalah pdf gabungan dari vr $\mathbf{X}$ j.h.j memenuhi sifat berikut ini :

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq 0, \forall x \in (x_1, x_2, \ldots, x_k)$
2. $\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$

contoh

contoh Tabel data berdistribusi $MULT(3; 0.4, 0.4)$

		x_2				
		0	1	2	3	
x_1	0	0.008	0.048	0.096	0.064	0.216
	1	0.048	0.192	0.192	0.000	0.432
	2	0.096	0.192	0.000	0.000	0.288
	3	0.064	0.000	0.000	0.000	0.064
		0.216	0.432	0.288	0.064	1.000

Misal

Tentukan $P(A) = P(X_1 = 0)$

Definisi pdf marjinal diskrit

Jika pasangan vr diskrit (X_1, X_2) mempunyai pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ maka pdf marjinal dari X_1 dan X_2 didefinisikan :

$$f_1(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1, x_2) \text{ dan } f_2(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2)$$

Definisi cdf gabungan

cdf gabungan dari k vr $X_1, X_2, \ldots, X_k$ didefinisikan :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k]$$

Sifat-sifat

$$\lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = F(-\infty, x_2) = 0 \quad \text{for all } x_2$$

$$\lim_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0 \quad \text{for all } x$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} F(x_1, x_2) = F(\infty, \infty) = 1$$

$$F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geqslant 0 \quad \text{for all } a < b \text{ and } c < d$$

$$\lim_{h \to 0^+} F(x_1 + h, x_2) = \lim_{h \to 0^+} F(x_1, x_2 + h) = F(x_1, x_2) \quad \text{for all } x_1 \text{ and } x_2$$

Definisi cdf gabungan kontinu

k vr dikatakan kontinu jika terdapat fungsi $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ merupakan pdf gabungan dari **X** s.d.h cdf gabungan dapat ditulis :

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f\left(t_1, t_2, \ldots, t_k\right) dt_1 \cdots dt_k$$

untuk semua nilai x yg mungkin, $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$

Jadi pada dimensi 1, pdf gabungan dapat dicari:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} F\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$$

teorema

Fungsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ adalah pdf gabungan dari vr $\mathbf{X}$ j.h.j memenuhi sifat berikut ini :

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq 0, \forall x \in (x_1, x_2, \ldots, x_k)$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_k) dx_1 \cdots dx_k = 1$

Contoh

Jika X adalah vR dengan pdf gabungan :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1 x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ & 0,\ x \text{ yang lain} \end{cases}$$

cari cdf gabungan

Latihan Waktu:30'

1. $$f(x,y)=\begin{cases} c(2x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 3, x \text{ dan } y \text{ bil.bulat} \\ 0, & x \text{ dan } y \text{ lain} \end{cases}$$

Tentukan

a. c b. $P(X=2, Y=1)$ c. $P(X\ge 1, Y\le 2)$

2. $$f(x,y)=\begin{cases} cxy, & 0<x<4, \quad 1<y<5 \\ 0, & x \text{ dan } y \text{ lain} \end{cases}$$

Tentukan

a. c b. $P(1<X<2, \quad 2<Y<3)$ c. $P(X\ge 3, Y\le 2)$