Bab I. Ayunan

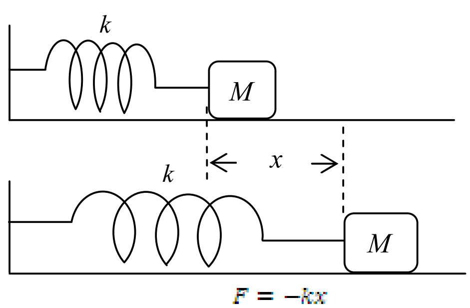
Pengantar Akustik ©by: Iwan Yahya
Grup Riset Akustik & Fisika Terapan (iARG)
Jurusan Fisika FMIPA UNS
iwanyy@yahoo.com

Telaah terhadap bunyi dan getaran sangat berkait bahkan tidak dapat dipisahkan dengan kajian tentang ayunan atau yang disebut juga dengan istilah osilasi. Anda tentu dapat mengenal gejala ini dalam kehidupan kita sehari-hari. Gerakan bandul jam, gerakan massa yang digantung pada pegas, dan bahkan gerakan dawai gitar saat dipetik merupakan contoh-contoh dari apa yang disebut sebagai ayunan. Pada bagian ini kita akan membahas tentang apa dan bagaimana sesungguhnya ayunan itu, serta bentuk ekspresi matematika yang mewakilinya. Setelah menyelesaikan bab ini Anda diharapkan dapat menyebutkan lebih banyak contoh ayunan serta memberikan penjelasan yang sesuai untuk contoh tersebut.

1.1. Ayunan Harmonis

Jika kita cermati, terdapat kesamaan mendasar dalam ketiga contoh di atas. Bandul jam, massa yang digantung pada pegas, serta dawai gitar yang dipetik memiliki pola gerakan yang sama yakni selalu menuju ke kedudukan semula atau titik setimbangnya.

Kita akan mengkaji hal tersebut lebih jauh dengan meninjau sebuah benda bermassa *M* (kg) yang terletak di atas bidang tanpa gesekan dan dikaitkan kepada salah satu ujung pegas berkonstanta *k* (N/m) sebagaimana yang disajikan dalam Gambar (1.1).



Gambar 1.1. Ayunan pegas. Ketika pegas disimpangkan sejauh x dari kedudukan setimbangnya lalu kemudian dilepas, maka massa M akan bergerak sedemikian rupa sehingga selalu menuju ke kedudukan semula. Hal ini terjadi karena adanya gaya pemulih sehingga timbul gejala yang kita kenal dengan ayunan.

Dalam keadaan tidak terdapat gaya yang bekerja pada massa *M* tersebut, maka ia akan tetap dalam keadaan diam di posisi setimbang, x=0. Namun seandainya Anda memberikan gaya kepada massa tersebut dengan cara menekan dan melepaskannya, maka massa tersebut akan bergerak periodik menurut frekuensi tertentu. Gejala serupa terulang bahkan jika salah seorang teman Anda menarik, memukul, atau memberi perlakuan berbeda, massa tersebut selalu bergerak dalam pola yang sama menuju posisi semula pada keadaan setimbang. Gerakan periodik disekitar titik setimbang inilah yang disebut dengan ayunan. Adapun gaya yang menyebabkan massa selalu bergerak ke kedudukan semula disebut dengan gaya pemulih.

Lantas apa yang terjadi jika massanya diubah atau pegasnya diganti dengan pegas lain yang memiliki konstanta berbeda? Anda dapat melakukan percobaan sendiri untuk membuktikannya, bahwa ternyata frekuensi ayunan pegas semata-mata ditentukan oleh nilai massa *M* dan konstanta pegas *k*. Lantas bagaimana ayunan tersebut bergerak?

Untuk menganalisanya, mari kita perhatikan persamaan gerak yang berlaku untuk sistem pada Gambar (1.1) di atas. Ketika pegas disimpangkan, maka berlaku hubungan,

$$F(x) = -kx \qquad (1.1)$$

Gaya tersebut berkaitan dengan energi potensial pegas yang diberikan oleh,

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (1.2)$$

dan keduanya dikaitkan dalam hubungan berbentuk $F(x) = -dU/dx$.

Ketika massa *M* mulai bergerak, maka berlaku hukum Newton kedua sehingga kita dapat menuliskan,

$$M\frac{dv}{dt} = -kx \qquad (1.3)$$

dengan

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad (1.4)$$

Tanda negatif dalam persamaan (1.1) mengandung pengertian bahwa gaya pemulih selalu bekerja untuk mengembalikan massa *M* ke kedudukan setimbangnya. Substitusi persamaan (1.4) ke dalam persamaan (1.3) menghasilkan persamaan diferensial orde kedua sebagai berikut,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0 \qquad (1.5)$$

Persamaan (1.5) merupakan bentuk hubungan fungsi $x(t)$ dengan derifatif keduanya d^2x/dt^2. Agar dapat memahami gejala ayunan ini lebih mendalam, maka kita harus menemukan bentuk suatu fungsi yang memenuhi persamaan (1.5) tersebut. Langkah yang kita lakukan adalah dengan menulis ulang persamaan tersebut ke dalam bentuk,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\left(\frac{k}{M}\right)x(t) \qquad (1.6)$$

Persamaan (1.6) menunjukkan kepada kita bahwa $x(t)$ haruslah sebuah fungsi yang derivatif keduanya merupakan negatif dari dirinya sendiri. Keadaan tersebut hanya dipenuhi oleh bentuk sinusuida. Pada kesempatan ini kita akan mencoba suatu solusi bagi persamaan (1.5) dengan bentuk,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \theta) \qquad (1.7)$$

Jika Anda melakukan substitusi persamaan (1.7) ke dalam persamaan (1.6), maka akan diperoleh hasil bahwa $\omega^2 = k/M$.

Dapatkah Anda menjelaskan apa yang terjadi jika kita memperbesar nilai *t* dalam persamaan (1.7) dengan faktor $2\pi/\omega$? Untuk mengetahuinya, cobalah masukkan bentuk $t + 2\pi/\omega$ untuk mengganti *t* pada persamaan tersebut, maka kita akan kembali medapatkan bentuk persamaan (1.6). Ini berarti bahwa fungsi dalam persamaan (1.6) berulang setelah waktu $2\pi/\omega$.

Dalam kalimat berbeda dapat dinyatakan bahwa periode ayunan adalah,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \qquad (1.8)$$

atau

$$\omega = \sqrt{k/M} = 2\pi/T \text{ (rad/sekon)} \qquad (1.8a)$$

yang merupakan frekuensi angular atau lebih sering disebut sebagai kecepatan sudut ayunan tersebut.

Gerak ayunan yang telah kita bahas ini disebut dengan gerak harmonis atau juga disebut dengan getaran harmonis. Hal penting yang harus kita pahami dari gejala yang kita gambarkan dengan persamaan (1.7) adalah bahwa karena fungsi cos memiliki nilai dalam rentang antara -1 dan +1. Ini berarti bahwa massa *M* berayun di sekitar titik setimbang dengan simpangan terbesar adalah nilai maksimum x_0. Nilai maksimum x_0 ini disebut dengan amplitudo. Kuantitas $(\omega t + \theta)$ disebut fase, dan θ disebut konstanta atau tetapan fase.

Kuantitas *k*/*M* memiliki dimensi

$$\left[\frac{k}{M}\right] = \frac{N/m}{kg} = \frac{kg.m/\text{sekon}^2}{kg} = \frac{1}{\text{sekon}^2}$$

sehingga bentuk $\sqrt{k/M}$ berdimensi frekuensi, radian/sekon (karena radian tidak berdimensi), dan nilainya tidak bergantung kepada amplitudo.

Saat massa *M* disimpangkan sejauh x_0 dan kemudian dilepaskan, maka ayunan dimulai dengan keadaan awal $x = x_0$. Sehingga $A = 0$ dan $B = x_0$, dan solusi untuk $x(t)$ akan berbentuk,

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

Dalam keadaan demikian, menyimpangkan massa *M* kepada suatu simpangan awal berarti menimbulkan perubahan panjang pegas dalam ukuran yang sama, $\Delta = x_0$, dan sesuai dengan persamaan (1.2) hal ini berarti pula bahwa kerja dengan energi sebesar $\frac{1}{2}kx^2$ (J) telah diberikan kepada pegas dalam bentuk energi potensial. Kemudian, ketika sistem pegas dan massa mulai berayun, maka massa *M* akan memiliki kecepatan,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_0 \sin \omega t\ ,$$

dan berhubungan dengan energi kinetik sebesar,

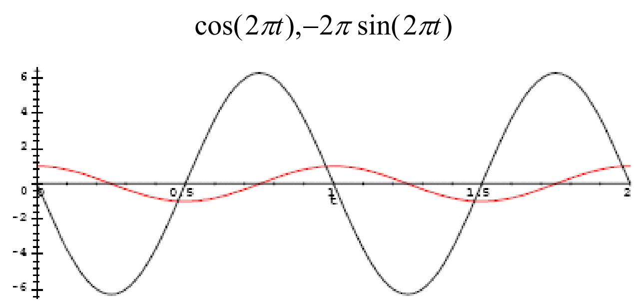
$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 x_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}kx_0^2 \sin^2 \omega t \qquad (1.9)$$

Lalu karena energi potensial pegas adalah,

$$\frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2 \omega t$$

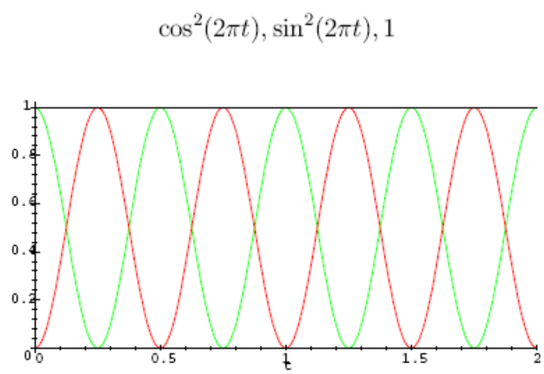
maka energi totalnya selalu konstan,

Energi total = $\frac{1}{2}kx_0^2$ (1.10)



Gambar 1.2. Profil simpangan dan kecepatan

Tatkala energi kinetik bernilai maksimum, maka energi potensialnya bernilai nol dan begitu pula sebaliknya. Gambaran energi pada sistem ayunan tersebut disajikan dalam Gambar (1.2) dan Gambar (1.3).



Gambar 1.3. Profil energi pada ayunan pegas. Garis hijau, merah, dan hitam berturut-turut menunjukkan energi potensial, energi kineti dan energi totalnya.

Garis berwarna merah pada Gambar (1.2) menunjukkan simpangan $x(t) = x_0 \cos(2\pi\upsilon t)$ saat x_0 = 1, $\upsilon = 1$ (ω = 1), adapun garis berwarna hitam menunjukkan kecepatan $v(t) = -\omega x_0 \sin(2\pi\upsilon t) = -2\pi \sin t$.

Contoh 1.1
Jabarkanlah persamaan diferensial

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0 \qquad (1.11)$$

dari syarat kekekalan energi

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = \text{konstan} \qquad (1.12)$$

Solusi:
Diferesnialkan persamaan (1.12) sebanyak satu kali, maka diperoleh

$$Mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0\,, \qquad (1.13)$$

padahal,

$$v = \frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Sehingga persamaan (1.13) berubah menjadi,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{M} x(t) = 0$$

Contoh 1.2

(a). Tentukanlah nilai massa *M* yang harus dipasang pada pegas dengan konstanta *k* = 10 N/m agar ayunan memiliki frekuesni 5 Hz. (b). Jika pegas diberi simpangan awal sebesar 3 cm, maka berapakah kecepatan maksimum massa *M*?

Solusi:

(a). Frekuensi sudut ayunan adalah $\omega = 2\pi \times 5 \mathrm{rad/sec}$. Selanjutnya dengan menggunakan $\omega = \sqrt{k/M}$ diperoleh $M = k/\omega^2 = 10/(10\pi)^2$ = 0,01 kg.

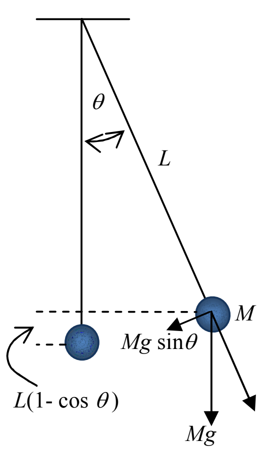
(b). Kecepatan massa diberikan oleh hubungan

$$v(t) = -\omega x_0 \sin \omega t ,$$

sehingga amplitudo kecepatan ayunan adalah $\omega x_0 = 2\pi \times 3 \times 0{,}03$ m/sec = 0,943 m/sekon.

Pendulum

Pada bagian ini kita akan mengkaji contoh lain dari kategori ayunan mekanik, yakni pendulum. Kita akan memulai kajian kita dengan meninjau persamaan gerak untuk sistem seperti yang dsajikan dalam Gambar (1. 4).



Gambar 1. 4. Pendulum, gaya pemulih yang timbul berkaitan dengan pengaruh gravitasi pada massa *M*. Dapatkah Anda menyebutkan kondisi apa saja yang berlaku untuk pendulum sederhana seperti di samping?

Gaya pemulih muncul sebagai konsekuensi gravitasi terhadap bola bermassa *M* dalam bentuk gaya gravitasi M_g yang saling meniadakan dengan gaya Mdv/dt yang berkaitan dengan kelembaman. Adapun frekuensi ayunan tidak bergantung kepada massa *M*.

Dalam kasus sistem ayunan seperti yang disajikan dalam gambar di atas, maka gerakan massa *M* terbatasi atau ditentukan oleh panjang pendulum *L*, dan persamaan gerak yang berlaku adalah,

$$ML\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg\sin\theta\,,$$

dimana dalam hal ini kecepatan bola sepajang lintasannya yang berupa busur lingkaran adalah $v(t) = L\theta(t)$. Faktor sin θ merupakan komponen yang searah dengan gravitasi dari gaya yang bekerja pada bola dalam arah θ. Selanjutnya dengan membuang *M* dari kedua sisi persamaan di atas, diperoleh bentuk

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \qquad (1.14)$$

yang merupakan persamaan diferensial tak linear untuk θ.

Jika dianggap simpangan awal ayunan cukup kecil $|\theta| << 1$ (rad), maka berlaku sin $\theta \cong \theta$ sehingga persamaan (1.14) dapat diubah menjadi bentuk linear sebagi berikut,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0\,, \qquad (1.15)$$

Persamaan (1.15) merupakan gambaran untuk ayunan sinusuidal dengan frekuensi diberikan oleh

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (1.16)$$

Jika L = 1 m, maka frekuensi ayunan adalah $\omega = \sqrt{9{,}8}$ rad/sekon = 13,3 rad/sekon atau ν = 0,498 Hz.

Contoh 1.3

Asumsikan bahwa solusi persamaan (1.14) adalah $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$, tunjukkanlah bahwa energi total massa yang berayun dalam kajian kita di atas bersifat konstan.

Solusi:

Energi kinetik diberikan oleh

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 = \tfrac{1}{2} M \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \tfrac{1}{2} ML^2 \omega^2 \theta_0^2 \sin^2 \omega t$$

Adapun energi potensial adalah *Mgh*, dimana $h = L(1 - \cos \theta)$. Jika θ bernilai kecil, maka cos θ dapat didekatai dengan bentuk

$$\cos \theta = 1 - \tfrac{1}{2} \theta^2$$

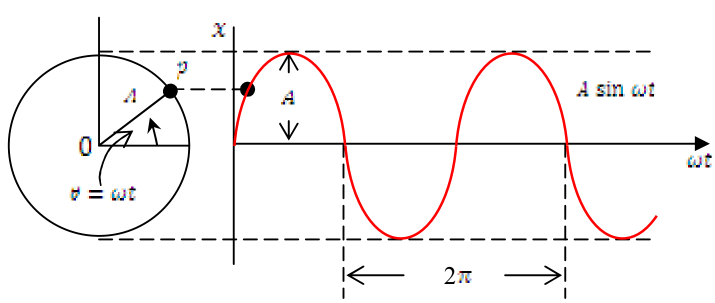
yang tidak lain merupakan ekspansi Taylor diambil hingga dua suku pertama, maka $h \cong \tfrac{1}{2} L \theta^2$, dan energi potensial menjadi

$$Mg \frac{L}{2} \theta^2 = \tfrac{1}{2} MgL \theta_0^2 \cos^2 \omega t$$

Dengan mengingat bahwa $\omega^2 = g / L$, maka diperoleh energi total untuk massa yang berayun adalah,

$\tfrac{1}{2} MgL \theta_0^2$ (konstan)

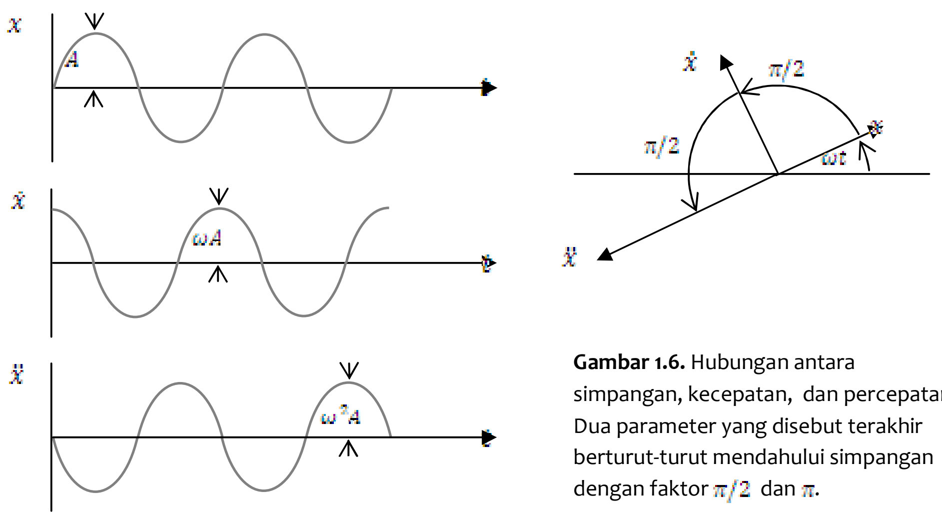
Pola Gerakan Berulang



Gambar 1.5. Proyeksi dari gerakan sebuah titik pada lintasan yang berbentuk lingkaran yang merupakan gerak harmonis.

Selanjutnya dalam bagian berikut akan ditunjukkan bahwa sebuah ayunan dapat disajikan sebagai proyeksi dari sebuah titik yang bergerak dalam lintasan melingkar dengan kecepatan konstan sebagaimana disajikan dalam Gambar (1.5).

Gambar tersebut menyajikan proyeksi dari gerakan titik *p* pada lintasan berbentuk lingkaran dengan jari-jari *A*. Jika titik tersebut bergerak dengan kecepatan sudut ω yang konstan, maka berlaku $\theta = \omega t$. Sebagaimana yang telah diterangkan di depan, Gambar (1.5) secara jelas menunjukkan bahwa pola gerakan titik *p* berbentuk $x = A \sin \omega t$ dan berulang dengan dengan faktor 2π radian.



Gambar 1.6. Hubungan antara simpangan, kecepatan, dan percepatan. Dua parameter yang disebut terakhir berturut-turut mendahului simpangan dengan faktor $\pi/2$ dan π.

Jika kita lakukan operasi derivatif terhadap *x*, maka kita akan memperoleh bentuk,

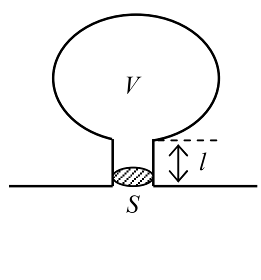
$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad (1.17)$$

Persamaan (1.17) menunjukkan bahwa percepatan sebuah gerak harmonis berbanding langsung dengan simpangannya dan arahnya menuju titik asal. Ilustrasinya disajikan dalam Gambar (1.6).

Resonator Helmholtz

Contoh ayunan yang lain adalah resonator Helmholtz. Dinamakan demikian untuk menghormati fisikawan Jerman Hermann von Helmholtz (1821-1894) yang telah mengembangkan seperangkat resonator untuk mengkaji respon pendengaran manusia terhadap bunyi. Dalam perkembangan yang lebih modern, resonator Helmholtz banyak digunakan sebagai komponen rancangan muffler maupun kotak (bass-reflex enclosure) loudspeaker.

Bentuk dari sebuah resonator Helmholtz sederhana disajikan dalam Gambar (1.7). Strukturnya menyerupai sebuah botol, terdiri dari sebuah rongga dengan volume *V* dan leher sepanjang *l* bertampang lintang *S*. Ketika bunyi merambat melalui tabung utama, maka tekanan bunyi menyebabkan massa udara yang berada di bagian leher resonator berfluktuasi dan berperilaku serupa dengan perilaku massa *M* dalam ayunan pegas, sementara rongga resonator akan berperilaku seperti pegas dengan konstanta sehingga membentuk sebuah ayunan yang memiliki frekuensi tertentu. Uraian yang lebih mendalam tentang resonator Helmholtz akan disajikan dalam Bab 8 saat kita membahas tapis akustik.



Gambar 1.7. Sebuah resonator Helmholtz yang terpasang sebagai percabangan pipa. Bentuk dan volume rongga dapat sangat beragam. Frekuensi ayunan diberikan oleh $f = (c_0/2\pi)\sqrt{S/Vl}$, dimana c_0 merupakan kecepatan rambat bunyi di udara.

1.2. Bentuk Penyajian Eksponensial

Selanjutnya kita akan membahas penyajian sinusuida dalam bentuk fungsi eksponensial menurut persamaan Euler seperti diberikan dalam persamaan (1.18).

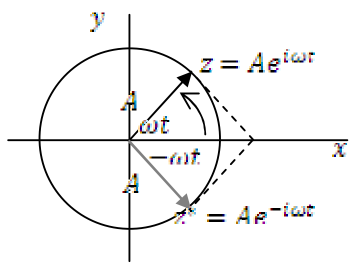
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (1.18)$$

dengan $i = \sqrt{-1}$. Untuk memperoleh interpretasi yang lebih tepat terhadap persamaan (1.18), kita akan meninjau sebuah vektor *A* yang berotasi dengan kecepatan sudut konstan yang kita sajikan dalam bentuk kompleks *z* dalam diagram Argand seperti dalam Gambar

(1.7). Dalam beberapa teks yang lain, penyajian seperti ini juga disebut dengan representasi fasor sebuah sinusuida.

$$\begin{aligned} z &= Ae^{i\omega t} \\ &= A\cos\omega t + i\,A\sin\omega t \\ &= x + iy \end{aligned} \tag{1.19}$$

x dan *y* dalam persamaan (1.19) berturut-turut merupakan bagian real dan bagian imaginer dari bentuk kompleks *z*. Persamaan (1.19) juga merupakan solusi dari persamaan (1.5) maupun (1.17) sehingga dapat digunakan untuk mengekspresikan sebuah gerak harmonis.



Gambar 1.8. Penyajian gerak harmonis dalam bentuk eksponensial. Vektor berwarna merah merupakan conjugate dari z, memiliki nilai yang sama tetapi bergerak dengan kecepatan sudut $-\omega$.

Berdasarkan Gambar (1.8), maka memungkinkan bagi kita untuk menyajikan bagian real persamaan (1.19) dalam bentuk jumlahan *z* dan *z**,

$$x = \frac{1}{2}(z + z*) = A\cos\omega t = \mathrm{Re}\,Ae^{i\omega t} \tag{1.20}$$

dengan Re dalam persamaan (1.20) mengandung pengertian bagian real dari z. Penyajian secara eksponensial ini memberikan kepada kita kemudahan dibandingkan dengan penyajian dalam bentuk sinusuida seperti yang telah kita bahas di depan.

Tabel 1.1. Beberapa sifat dari operasi fungsi eksponensial

Bentuk Operasi	Hasil
Perkalian	$z_1 z_2 = A_1 A_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
Pembagian	$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
Pangkat	$z^n = A^n e^{in\theta}$ $z^{1/n} = A^{1/n} e^{i\theta/n}$
cos	$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

sin	$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Derivatif	$\frac{d(e^{i\alpha t})}{dt} = i\alpha e^{i\alpha t}$
Intergral	$\int e^{i\alpha t} dt = \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha t}$

Beberapa sifat penting dari operasi eksponensial yang kelak akan banyak kita gunakan dalam pokok bahasan selanjutnya disajikan dalam tabel (1.1).

1.3. Ayunan Teredam

Sejauh ini kita telah mengurai beberapa contoh ayunan. Ketika membahas ayunan pegas pada Gambar (1.1), kita telah mengasumsikan bahwa pegas dan massa *M* bergerak dengan bebas pada bidang tanpa gesekan. Apakah hal yang demikian pernah benar-benar Anda temukan dalam kehidupan sehari-hari? Untuk meneruskan pembahasan kita, Anda dapat melakukan percobaan sederhana dengan cara menggantung sebuah benda bermassa *M* di ujung pegas, menariknya untuk memberi sedikit simpangan, lalu lepaskan. Ternyata yang kemudian terjadi adalah pegas dan massa *M* akan berayun dalam periode tertentu sebagaimana yang telah kita bahas di depan, namun amplitudonya terus berkurang sebelum akhirnya berhenti sama sekali.

Hal tersebut menunjukkan bahwa terdapat gaya lain yang sebelumnya tidak kita sertakan dalam contoh-contoh di depan. Gaya inilah yang menyebabkan energi ayunan terserap dan berubah ke bentuk lain. Lazim disebut dengan istilah gaya gesekan, dan besarnya berbanding langsung dengan kecepatan.

Karena itu, kita tidak lagi dapat menggunakan persamaan (1.5) untuk kasus yang sedang kita bicarakan. Persamaan gerak yang berlaku adalah,

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = ma \qquad (1.21)$$

atau

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (1.22)$$

Perhatikanlah, sekarang kita memiliki suku berbentuk $-bdx/dt$ dalam persamaan (1.21) yang mana sebelumnya tidak terdapat dalam persamaan (1.5). Inilah representasi gaya gesekan. Tanda negatif menunjukkan bahwa arahnya selalu berlalwanan dengan arah gerakan massa. Adapun *b* merupakan tetapan yang nilainya bergantung kepada rapat massa fluida, dan bentuk dari massa *M*.

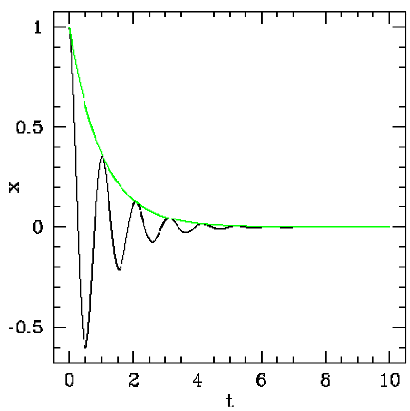
Sebelum kita mencoba menemukan penyelesaian dari persamaan (1.22), sekarang cobalah bayangkan bahwa Anda memiliki sebuah ayunan pegas yang berayun cukup cepat, katakanlah periodenya 1 sekon. Jika pada saat *t*=0, simpangan ayunan bernilai 1 cm, dan misalkan satu sekon kemudian simpangan tersebut berkurang menjadi 0,5 cm. Kejadian tersebut berulang dan berulang dengan pengurangan amplitudo setengah dari periode sebelumnya. Jika dibuat plot antara t dan amplitudo, maka kita akan memperoleh hasil berupa pola penurunan amplitudo secara eksponensial menurut bentuk,

$$A(t) = A_0 e^{-\alpha t} \tag{1.23}$$

Sehingga

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \theta) = A_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \theta) \tag{1.24}$$

Untuk menggambarkan pola ayunan yang dimaksud di dalam persamaan (1.24), Gambar (1.9) menyajikan pola penurunan amplitudo untuk fungsi $x(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)$. Garis hijau adalah $A(t) = e^{-t}$ yang merupakan cungkup (*envelope*) ayunan. Tentu saja, pola yang berbeda akan kita peroleh untuk keadaan laju penurunan amplitudo dan frekuensi yang berbeda.



Gambar 1.9. Pola penurunan amplitudo dari sebuah fungsi berbentuk $x(t) = e^{-\alpha t}\cos(2\pi t)$ dengan $\alpha = 1$. Pola yang berbeda akan kita peroleh untuk nilai α yang berbeda. Tampak bahwa ayunan bergerak dengan amlitudo yang terus mengecil menuju nol.

Untuk memperoleh pemahaman yang bersifat lebih kuantitatif, maka kita akan mencoba memilih bentuk,

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} \tag{1.25}$$

dan memasukkannya sebagai penyelesaian persamaan (1.22). Jika dilakukan prosedur serupa seperti yang telah kita lakukan terhadap persamaan (1.7), maka diperoleh,

$$M\alpha^2 x + b\alpha x + kx = 0 \tag{1.26}$$

Kemudian jika kita hilangkan parameter *x* dalam persamaan (1.26), kita akan mendapatkan bentuk,

$$M\alpha^2 + b\alpha + k = 0 \tag{1.27}$$

Persamaan (1.27) merupakan persamaan kuadrat untuk α yang penyelesaiannya diberikan oleh,

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4Mk}}{2M} \tag{1.28}$$

Kita akan mengkaji persamaan (1.28) secara lebih detil dan melihat konsekuensinya terhadap perilaku ayunan. Jika faktor redaman *b* bernilai besar, tentu akar kuadrat dalam persamaan (1.28) akan bernilai real, dan sebaliknya menjadi imaginer untuk keadaan $b^2 < 4Mk$.

1. Keadaan $b^2 < 4Mk$

Keadaan seperti ini disebut dengan keadaan teredam lemah, α berbentuk kompleks dengan bagian realnya diberikan oleh $-b/2M$. Adapun bentuk imaginernya dapat kita peroleh dengan menulis kembali $\sqrt{b^2 - 4Mk}$ berbentuk,

$$\sqrt{(-1)(4Mk - b^2)} = i\sqrt{(4Mk - b^2)} \tag{1.29}$$

Sehingga kita dapat menulis ekspresi untuk α berbentuk,

$$\alpha = \frac{-b}{2M} \pm i\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{b^2}{4M^2}} \tag{1.30}$$

Tampak jelas dari persamaan (1.30) bahwa jika *b* = 0, maka bentuk akar dalam persamaan tersebut berubah menjadi $\sqrt{k/M}$ yang tak lain frekuensi ayunan seperti yang diberikan dalam persamaan (1.8a). Dengan demikian bentuk akar dalam persamaan (1.30) juga berdimensi yang sama, sehingga membolehkan kita untuk menulis persamaan (1.30) berbentuk,

$$\alpha = \frac{-b}{2M} \pm i\omega \tag{1.31}$$

dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{b^2}{4M^2}} \tag{1.32}$$

Substitusi persamaan (1.31) pada persamaan (1.25) akan menghasilkan bentuk penyelesaian persamaan (1.22) sebagai berikut,

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} = x_0 e^{\left(\frac{-b}{2M} \pm i\omega\right)t} = x_0 e^{\frac{-b}{2M}t} e^{\pm i\omega t} \tag{1.33}$$

Tanda $\pm$ dalam persamaan (1.33) mengandung pengertian bahwa persamaan tersebut terdiri dari dua bentuk penyelesaian. Kita dapat pula menulis persamaan tersebut dalam bentuk yang ekivalen,

$$x(t) = x_0 e^{\frac{-b}{2M}t} \{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\} \tag{1.34}$$

Persamaan (1.34) tidak lain merupakan perkalian sebuah bentuk eksponensial dengan sinusuida. Amplitudo x_0 berkurang dengan laju $e^{\frac{b}{2M}}$. Sekarang mari kita cermati makna dari bentuk $-b/2M$ ini. Ketika ia bernilai nol, maka itu berarti tidak terdapat penurunan amplitudo sama sekali, akan tetapi jika ia bernilai cukup besar, maka penurunan amplitudo akan berlangsung secara sangat cepat.

Sebagai gambaran, misalnya amplitudo pada saat t = 0 adalah bernilai satu. Kita ingin mengetahui waktu τ yang diperlukan untuk meredam hingga mencapai keadaan 1/e atau ekivalen dengan nilai 0,37 kali amplitudo semula. Besaran ini disebut dengan waktu relaksasi atau juga disebut dengan istilah modulus pererasan. Saat t=1, kita memiliki simpangan sebesar $e^{-b/2M}$, maka untuk keadaan yang ditanyakan berlaku,

$$e^{\frac{-b}{2M}\tau} = e^{-1} \tag{1.35}$$

atau

$$\tau = \frac{2M}{b} \tag{1.36}$$

Persamaan (1.36) lazim disebut dengan waktu pelemahan. Sehingga kita dapat menulis ulang penyelesaian pada persamaan (1.34) ke bentuk,

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau}\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\} \tag{1.37}$$

Ketika redaman bertambah, τ mengecil, yang berarti bahwa proses peredaman berlangsung lebih cepat. Akan tetapi dari persamaan (1.32) kita ketahui bahwa saat redaman *b* membesar, ω mengecil hingga bernilai nol. Dapatkah Anda menjelaskan apa yang kemudian terjadi setelah keadaan tersebut?

2. Keadaan $b^2 > 4Mk$

Pada keadaan ini kedua akar α bernilai real, dan disebut sebagai keadaan teredam lebih.

$$\alpha_+ = \frac{-b+\sqrt{b^2-4Mk}}{2M} \tag{1.38}$$

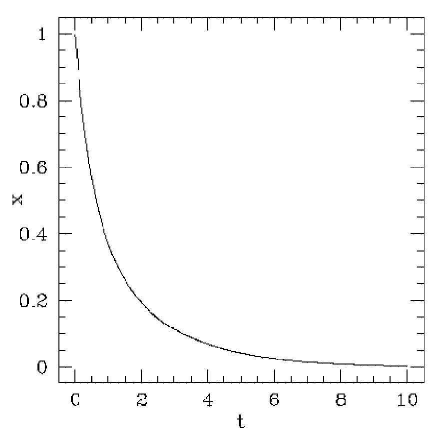
dan

$$\alpha_- = \frac{-b-\sqrt{b^2-4Mk}}{2M} \tag{1.39}$$

Hal ini berarti bahwa kedua solusi berkurang secara eksponensial.

$$x(t) = \{e^{\alpha_+ t}, e^{\alpha_- t}\} \tag{1.40}$$

Gambar (1.10) menyajikan contoh dari ayunan sejenis yang diberikan oleh persamaan berbentuk $x(t) = \frac{1}{2}(\exp(-2t) + \exp(-0{,}5t))$.



Gambar 1.10. Perilaku ayunan yang sejenis dengan keadaan yang digambarkan oleh persamaan (1.40).

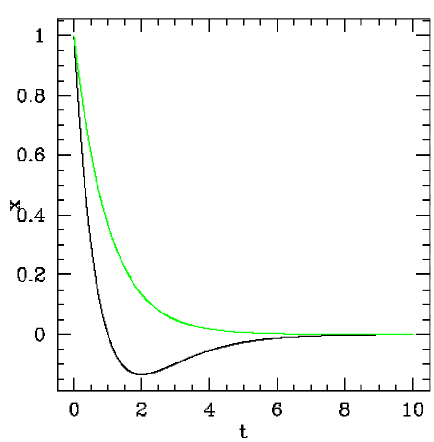
Ketika *b* bertambah, kedua solusi α_+ dan α_- menjadi sangat berbeda satu sama lain. $\alpha_+ \to 0$ sementara $\alpha_- \to \infty$. Saat α_+ bernilai sangat kecil itu berarti bahwa pelemahan amplitudo berlangsung sangat lambat. Sehingga ketika *b* bertambah, laju penurunan amplitudo malah melambat. Hal ini berlawanan dengan keadaan pada kasus nomor 1 di atas. Pada keadaan ini tidak terjadi ayunan akibat gesekan yang sangat besar dan massa tidak dapat bergerak. Yang terjadi hanyalah penuruan amplitudo secara perlahan.

3. Keadaan $b^2 = 4Mk$

Setelah kita membahas dua keadaan di atas, dapatkah Anda menentukan nilai terbaik untuk *b* sehingga massa M dapat kembali ke keadaan setimbang secara cepat? Keadaan ini memiliki banyak manfaat untuk aplikasi dan rekayasa, contohnya untuk kepentingan perancangan komponen peredam (*shock absorber*) pada kendaraan bermotor.

Saat *b* bernilai termapau kecil, seperti yangtelah kita lihatpada kasus pertama, akan menimbulkan ayunan yang lama tanpa menimbulkan pengurangan yang berarti pada amplitudo. Namun, jika *b* terlampau besar, keadaan berubah seolah dalam keadaan terhimpit dan memerlukan waktu yang lama sebelum dapat kembali menggerakkan massa *M*.

Pilihan terbaik untuk nilai *b* adalah pada keadaan $b^2 = 4Mk$, yang disebut sebagai keadaan teredam kritis, yang berada diantara keadaan teredam lemah dengan teredam lebih. Ilustrasinya disajikan dalam Gambar (1.11) dari sebuah fungsi yang berbentuk $x(t) = \exp(-t)\,(1-t)$. Garis warna hijau adalah plot untuk $\exp(-t)$.



Gambar 1.11. Keadaan teredam kritis. Anda diminta menjabarkan bentuk penyelesaian untuk keadaan ini.

1.4. Superposisi Ayunan Harmonis

Pada bagian ini kita akan mengkaji apa yang terjadi jika terdapat lebih dari satu ayunan yang saling bersuperposisi satu sama lain. Pemahaman terhadap gejala superposisi ini sangat penting karena pada dasarnya gelombang, apa pun jenisnya, jarang sekali atau bahkan tidak pernah eksis secara alami dalam keadaan benar-benar berfrekuensi tunggal terkecuali merupakan hasil kreasi manusia. Penjelasan yang lebih mendalam tentang hal ini akan Anda temukan saat kita membahas analisis frekuensi pada Bab 4.

Dimisalkan kita memiliki dua ayunan berbentuk,

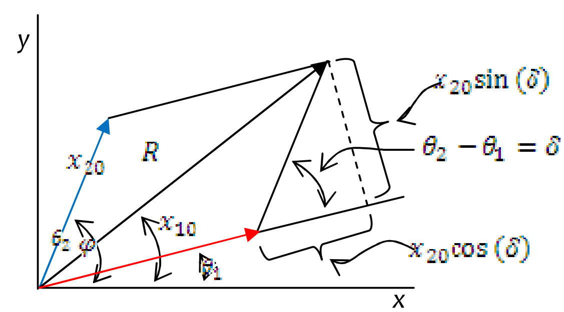
$$x_1(t) = x_{10}\cos(\omega_1 t + \theta_1) \qquad (1.41a)$$

dan

$$x_2(t) = x_{20}\cos(\omega_2 t + \theta_2) \qquad (1.41b)$$

Kita akan membahas beberapa kemungkinan keadaan yang dapat timbul dari superposisi kedua persamaan (1.41).

1. Keadaan $\omega_1 = \omega_2$.



Gambar 1.12. Superposisi dua ayunan dalam persamaan (1.41) dalam hal ini pada t = 0.

Dari Gambar (1.12) diperoleh hubungan,

$$R^2 = (x_{10} + x_{20}\cos(\delta))^2 + (x_{20}\sin(\delta))^2$$
$$= x_{10}^2 + x_{20}^2 + 2x_{10}x_{20}\cos(\delta)$$

dan tetapan fasenya

$$\tan\varphi = \frac{x_{10}\sin\theta_1 + x_{20}\sin\theta_2}{x_{10}\cos\theta_1 + x_{20}\cos\theta_2}$$

Sehingga hasil superposisi dapat dinyatakan dalam bentuk,

$$x(t) - R\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1.42)$$

Apa yang kemudian terjadi jika persamaan (1.41a) dan (1.41b) saling tegak lurus satu sama lain? Untuk mengetahuinya, cobalah Anda misalkan bentuk dalam persamaan (1.41a) sebagai $x(t)$ dan persamaan (1.41b) sebagai $y(t)$, dengan amplitudo masing-masing a_1 dan a_2, lalu kemudian gunakan identitas trigonometri $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ dan $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ untuk mengurai $x(t)/a_1$ dan $y(t)/a_2$, maka akan kita dapatkan bentuk,

$$\frac{x(t)^2}{a_1^2} + \frac{y(t)^2}{a_2^2} - \frac{2x(t)y(t)}{a_1a_2}\cos(\theta_2 - \theta_1) = \sin^2(\theta_2 - \theta_1) \qquad (1.43)$$

yang tak lain merupakan persamaan umum untuk ellips. Lihat H.J. Pain (1983) dan R. K. Wangsness (1986) untuk menambah wawasan Anda dalam masalah ini.

Pada umumnya sumbu ellips akan condong ke arah sumbu x atau y. Namun demikian, jika $\delta = \theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, persamaan (1.43) akan berubah menjadi,

$$\frac{x(t)^2}{a_1^2} + \frac{y(t)^2}{a_2^2} = 1 \qquad (1.44)$$

yang merupakan ellips dengan sumbu-sumbu a_1 dan a_2. Jika $a_1 = a_2 = a$ maka persamaan (1.44) berubah menjadi persamaan lingkaran $x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$. Tabel 1.2 menyajikan rangkuman hasil superposisi ayunan yang memiliki frekuensi yang sama pada berbagai keadaan beda fase δ antara keduanya.

Tabel 1.2 Rangkuman keadaan hasil superposisi dua ayunan dengan frekuensi yang sama

δ	Persamaan untuk $y(t)$	Pola yang terbentuk

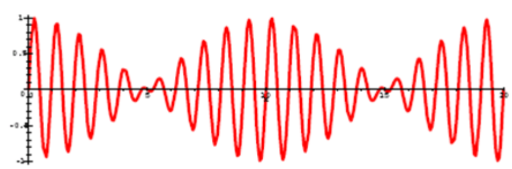
0, 2π, 4π, ..., $(0+n2\pi)$, dengan n bilangan bulat	$y(t) = \frac{a_2}{a_1}x(t)$	Garis lurus melalui titik asal dengan kemiringan a_2/a_1
π, 3π,......, $(n\pi)$, dengan *n* merupakan bilangan ganjil	$y(t) = -\frac{a_2}{a_1}x(t)$	Garis lurus yang sama dengan di atas, namun arah gradiennya berlawanan
$n\pi/4$, *n* bilangan ganjil	Persamaan (1.43)	Ellips
$n\pi/2$, *n* bilangan ganjil; $a_1 = a_2 = a$	Persamaan lingkaran	Lingkaran

Keadaan dimana $\delta = n\pi$ yang membentuk pola garis lurus disebut juga keadaan terpolarisasi bidang. Keadaan lain dalam tabel (1.2) disebut sebagai keadaan terpolarisasi lingkaran atau ellips. Adapun bidang polarisasi adalah bidang yang tegak lurus terhadap bidangn dimana ayunan itu bergerak.

2. Keadaan $\omega_1 \neq \omega_2$.

Apa yang terjadi jika ω_2 sedikit lebih besar dibanding ω_1? Untuk mengetahuinya, cobalah Anda jumlahkan persamaan bentuk $x_1(t) = a_1 \sin \omega_1 t$ dan $x_2(t) = a_2 \sin \omega_2 t$ dan gunakan identitas triginometri $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos(\frac{1}{2}\text{jumlah})\cos(\frac{1}{2}\text{selisih})$ maka akan kita peroleh bentuk,

$$x(t) = 2a \sin\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2} \cos\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2} \qquad (1.45)$$



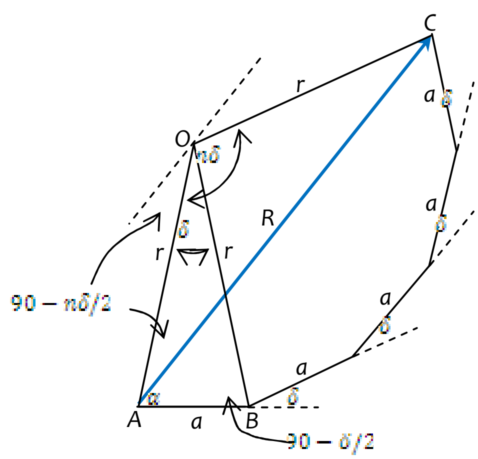
Gambar 1.13 Superposisi dua ayunan harmonis dengan frekuensi sedikit berbeda. Gejala ini disebut dengan *beat* atau layangan. Ayunan bergerak dengan frekuensi $(\omega_2 + \omega_1)/2$ dalam *envelope* (cungkup) berbentuk $\cos[(\omega_2 - \omega_1)t/2]$. Amplitudonya berkisar antara -2*a* dan 2*a*.

Persamaan (1.45) merupakan bentuk ayunan yang ilustrasinya disajikan dalam Gambar (1.13), berupa sebuah layangan yang terbentuk oleh dua komponen, simpangannya berflukstuasi dalam rentang -2*a* sampai 2*a* dengan frekuensi $(\omega_2 + \omega_1)/2$ dalam cungkup berbentuk $\cos[\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}]$. Kita akan berhadapan dengan situasi sejenis jika membahas persoalan ayunan tergandeng atau masalah grup gelombang.

3. Superposisi *n* buah ayunan sederhana

Selanjutnya apa yang terjadi jika terdapat *n* buah ayunan dengan amplitudo a dan frekuensi ω yang sama bersuperposisi namun satu sama lain, dimana masing-masing ayunan yang berurutan memiliki beda fase sebesar δ? Vektor dari hasil superposisi tersebut disajikan dalam Gambar (1.14). Dari gambar tersebut jelas bahwa hasil superposisi dapat dinyatakan dengan bentuk,

$$R\cos(\omega t + \alpha) = a\cos\omega t + a\cos(\omega t + \delta) + a\cos(\omega t + 2\delta) + \cdots$$
$$+ a\cos(\omega t + [n-1]\delta) \qquad (1.46)$$



Gambar 1.14 Superposisi dari *n* buah ayunan sederhana yang memiliki amplitudo dan frekuensi yang sama namun memiliki beda fase δ untuk setiap ayunan yang bersebelahan. Meski dalam gambar ini hanya terdiri dari lima buah ayunan, namun ketentuan serupa berlaku untuk berapapun nilai *n*. Lihat H.J. Pain sebagai pembanding.

Dari Gambar (1.14) dapat kita lihat bahwa,

$$a = 2r\sin\frac{\delta}{2}$$

dengan *r* merupakan jari-jari poligon. Selanjutnya dari segi tiga *OAC*, kita dapat menghitung nilai vektor resultan *R* sebagai,

$$R = 2r\sin\frac{n\delta}{2} = a\frac{\sin(\frac{n\delta}{2})}{\sin\delta/2} \tag{1.47}$$

Adapun α dapat diperoleh dengan membandingkan segitiga *OAB* dan *OAC*, dan nilainya diberikan oleh,

$$\alpha = \left(90 - \frac{\delta}{2}\right) - \left(90 - \frac{n\delta}{2}\right) = (n-1)\frac{\delta}{2}$$

Sehingga persamaan (1.46) dapat ditulis kembali berbentuk,

$$R\cos(\omega t + \alpha) = a\frac{\sin n\delta/2}{\sin\delta/2}\cos[\omega t + (n-1)\frac{\delta}{2}] \tag{1.48}$$

Selanjutnya mari kita perhatikan lebih jauh perilaku bentuk $a[(\sin n\delta/2)/(\sin\delta/2)]$ dalam persamaan (1.48). Nilainya sangat bergantung kepada δ. Tatkala *n* bernilai besar, maka δ bernilai sangat kecil, dan poligon dalam Gambar menjadi sebuah busur lingkaran yang pusatnya berada di titik *O* dan panjangnya *A=na*, dan *R* merupakan panjang tali busurnya. Untuk keadaan δ yang sangat kecil (*n* sangat besar), maka dapat kita tuliskan,

$$\alpha = (n-1)\frac{\delta}{2} \approx \frac{n\delta}{2}$$

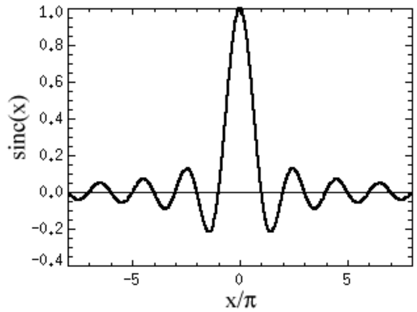
dan

$$\sin\frac{\delta}{2} \rightarrow \frac{\delta}{2} \approx \frac{\alpha}{n}$$

Sehingga dalam keadaan ini,

$$R = a\frac{\sin n\delta/2}{\sin\delta/2} = a\frac{\sin\alpha}{\alpha/n} = na\frac{\sin\alpha}{\alpha} = A\,\mathrm{sinc}\,\alpha \tag{1.49}$$

Bentuk $\mathrm{sinc}\,\alpha = (\sin\alpha/\alpha)$ dalam persamaan (1.49) lazim disebut sebagai fungsi sinus cardinal. Bentuk tersebut sangat banyak digunakan dalam teori sampling pada pengolahan sinyal digital, dan kita juga akan banyak menggunakannya kelak saat membahas masalah analisis frekuensi. Ilustrasi fungsi sinc disajikan dalam Gambar (1.15).



Gambar 1.15 Sinc (x). Fungsi ini ini banyak sekali digunakan dalam analisis frekuensi dan pengolahan sinyal secara digital. Diantaranya akan kita bahas sebagai contoh saat kita mempelajari analisis frekuensi.

1.5. Faktor Kualitas Ayunan Teredam

Faktor kualitas, *Q*, merupakan parameter disamping waktu relaksasi yang dapat kita gunakan untuk menggambarkan laju pengurangan energi dalam sebuah ayunan teredam. Dimisalkan kita memiliki ayunan berbentuk,

$$x(t) = x_0 e^{-bt/2M}$$

Maka kita dapat menuliskan gambaran penurunan energi dalam bentuk,

$$x(t)^2 = x_0^2 e^{(-\frac{bt}{2M})^2}$$

atau

$$E(t) = E_0 e^{(-\frac{b}{M})t}$$

dengan E_0 merupakan energi pada saat *t*=0.

Waktu yang diperlukan untuk mencapai keadaan dimana energi *E* berubah menjadi $E_0 e^{-1}$ diberikan oleh $t = M/b$ sekon, dimana sepanjang waktu *t* tersebut ayunan bergerak dengan frekuensi $\omega' M/b$ radian. Selanjutnya kita mendefinisikan faktor kualitas *Q* sebagai

$$Q = \frac{\omega' M}{b} \tag{1.50}$$

yakni suatu bilangan dalam radian yang menunjukkan bagaimana energi sebuah ayunan teredam berkurang dari keadaan semula menjadi $E = E_0 e^{-1}$.

Secara umum *Q* bernilai sangat besar sehingga *b* bernilai sangat kecil, maka keadaan dari persamaan (1.32) menjadi,

$$\frac{k}{M} \gg \frac{b^2}{4M^2}$$

Sehingga,

$$\omega' \approx \omega_0 = \left(\frac{k}{M}\right)^{1/2}$$

Dengan demikian kita dapat menuliskan bentuk pendekatan untuk *Q* sebagai

$$Q = \frac{\omega M}{b} \tag{1.51}$$

yang merupakan sebuah tetapan bagi sebuah sistem yang teredam dengan ω diberikan oleh persamaan (1.32).

Kini kita dapat menyatakan b/M bernilai sama dengan ω/Q, maka kita dapat menulis kembali,

$$E = E_0 e^{\left(\frac{b}{M}\right)t} = E_0 e^{-\frac{\omega t}{Q}}$$

Adapun fakta dari persamaan (1.51) bahwa *Q* merupakan sebuah tetapan berdampak pada nisbah energi yang tersimpan di dalam sistem terhadap kehilangan energi tiap siklus ayunannya juga harus tetap.

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{\omega M}{2\pi b} = \frac{\upsilon M}{b} \tag{1.52}$$

Persamaan (1.52) merupakan ukuran yang menunjukkan jumlah pengulangan ayunan sempurna hingga sistem tersebut mencapai keadaan energinya sebesar e^{-1} kali energi semula. Kemudian jika dimisalkan $E = E_0 e^{\left(-\frac{b}{M}\right)t}$, maka kehilangan energi per siklus ayunan adalah,

$$-dE = \frac{b}{M} E\,dt = \frac{b}{M} E \frac{1}{\nu'}$$

dengan $dt = 1/\nu'$ merupakan periode ayunan. Karenanya kita dapat menuliskan kembali nisbah energi yang tersimpan di dalam sistem terhadap kehilangan energi per siklus ayunan sebagai

$$\frac{E}{-dE} = \frac{\nu' M}{b} \approx \frac{\nu M}{b} = \frac{Q}{2\pi} \qquad (1.53)$$

Rangkuman

Gaya pemulih pada sebuah ayunan menyebabkannya selalu bergerak menuju titik setimbangnya. Periode ayunan tidak berhubungan dengan dengan amplitudo, akan tetapi ditentukan oleh parameter internal yang berkait dengan gaya pemulih pada ayunan tersebut.

Persamaan gerak ayunan menunjukkan perilaku berulang yang dapat diekspresikan dengan bentuk matematika $\ddot{x} = -\omega^2 x$, sehingga solusinya dapat dipenuhi oleh fungsi sinusuida. Disamping itu, kita dapat menggunakaan persamaan Euler untuk menyajikan ayunan beserta solusinya dalam bentuk eksponensial atau kompleks.

Pendulum dan resonator Helmholtz merupakan dua contoh ayunan yang patuh kepada bentuk matematika di atas. Massa udara dalam leher resonator Helmholtz berperilaku analog dengan massa dalam ayunan pegas sementara rongganya berperilaku selayaknya pegas.

Ayunan teredam merupakan perilaku yang lebih nyata di dalam kehidupan kita sehari-hari. Dalam keadaan ini, energi ayunan berkurang dan berubah menjadi panas akibat adanya faktor gesekan yang tergambarkan oleh suku berbentuk $-b\,dx/dt$ dalam persamaan ayunan teredam. Laju pengurangan energi dalam ayunan teredam dapat dinyatakan dalam beberapa parameter antara lain waktu relaksasi ataupun faktor kualitas.

Dalam keadaan tertentu sejumlah ayunan dapat muncul secara serempak dan bersuperposisi satu sama lain. Hasil superposisinya dapat diselesaikan secara geometri maupun dengan notasi kompleks.

Bacaan yang Disarankan

Pain, H.J., The Physics of Vibrations and Waves. 3rd Ed. John Wiley & Sons. New York, 1983

Resnick, R., Halliday, D., and Krane, K. S. Physics Vol I, 4th Ed. John Wiley & Sons. New York, 1992

Reinstra, S. W., and Hirschberg, A., An Introduction to Acoustics. Eindhoven University of Technology. Eindhoven, 2006

Thomson, W. T. Theory of Vibration with Applications. Prentice-Hall International Inc. New Jersey, 1993

Tjia, M.O., Gelombang. Dabara Publisher. Solo, 1994

Wangsness, R. K. Electromagnetic Fields. 2nd Ed. John Wiley & Sons. Singapore. 1986

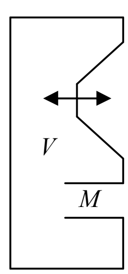
Soal-soal Latihan

1. Sebuah gerak harmonis dengan amplitudo 0,40 cm dan periode 0,15 sekon. Tentukanlah kecepatan dan percepatan maksimumnya.
2. Sebuah ayunan harmonis memiliki frekuensi 20 Hz dan kecepatan maksimunya sebesar 4,57 m/s. Tentukanlah amplitudo simpangannya, periode, dan percepatan maksimumnya.
3. Sebuah benda berayun secara harmonis menurut persamaan,

$$x = (3{,}14 \text{ m}) \cos [(8{,}38 \text{ rad/s})t + 1{,}92 \text{ rad}]$$

Maka tentukanlah tentukanlah simpangan, kecepatan, dan percepatannya saat t = 1,9 sekon. Tentukan pula frekuensi dan perioda ayunan tersebut.

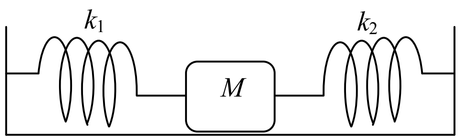
4. Rancangan sebuah kotak loudspeaker disajikan dalam gambar (1.16).



Gambar (1.16). Jika tampang lintang leher dan volume rongga berturut-turut adalah 0,02 m^2 dan 0,5 m^2, panjang leher 0,05 m, dan kecepatan bunyi di udara adalah 343 m/s dan temperatur udara 20°C, berapakah frekuensi resonansi dari kotak loudspeaker tersebut?

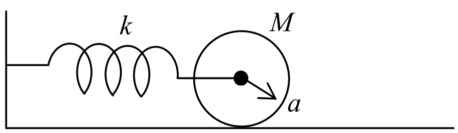
5. Nyatakanlah (i). 3 + 4i, (ii). 5 – 3i, dan (iii). – 6 + 3i kedalam dalam bentuk eksponensial.

6. Jumlahkanlah dua bentuk kompleks (3 + 2i) dan (5 – 3i) lalu nyatakan hasilnya dalam bentuk $A\angle\theta$.
7. Tentukanlah frekuensi ayunan dari sistem dalam gambar (1.17) berikut.



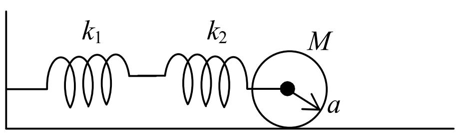
Gambar 1.17

8. Tentukanlah frekuensi ayunan dari sistem pada gambar (1.18). Silinder memiliki massa *M* dan berjejari *a* menggelinding di atas permukaan tanpa tergelincir.



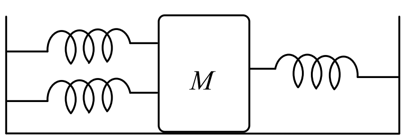
Gambar 1.18

9. Perhatikan gambar (1.19). Tentukanlah, (a). Konstanta efektif dari rangkaian dua buah pegas yang terpasang seperti dalam gambar di bawah ini dimana masing-masing memiliki konstanta k_1 dan k_2. (b). Tentukan pula frekuensi ayunannya.



Gambar 1.19

10. Perhatikan gambar (1.20). Tentukan frekuensi ayunan tersebut jika setiap pegas memiliki konstanta *k* yang sama.



Gambar 1.20

11. (Adopsi H. J. Pain 1.5) Simpangan sebuah ayunan harmonis sederhana diberikan oleh $x = a\sin(\omega t + \theta)$. Jika dimisalkan ayunan berawal pada saat *t*=0 pada posisi x_0 dengan kecepatan awal v_0, tunjukkan bahwa $\tan\theta = \omega x_0/v_0$ dan $a = (x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2})^{1/2}$

12. Tunjukkanlah bahwa persamaan (1.48) dapat diperoleh dengan notasi kompleks deret eksponensial.
13. (Adopsi H. J. Pain 1.20) Tunjukkan bahwa solusi $x = (A + Bt)e^{-bt/2M}$ memenuhi persamaan $M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ jika $\frac{b^2}{4M^2} = k/M$