METODE TERBUKA

ITERASI 1 TITIK SEDERHANA

METODE NEWTON RAPHSON

Metode Iterasi Satu Titik Sederhana

- Metode iterasi sederhana adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh : x = g(x).
- dikenal juga sebagai metode $x = g(x)$
- Bentuk iterasi satu titik ini dapat dituliskan dalam bentuk

$x(n+1)=g(xn)$

Dimana $n=0,1,2,3,....$

Contoh

- Gunakan metode iterasi satu titik untuk mendapatkan akar dari

$$x^3 - 3x - 20 = 0$$

- Langkah – langkah penyelesaian

- menyusun kembali persamaan tersebut dalam bentuk *x=g(x)*.

$$x = \sqrt[3]{(3x + 20)} \qquad \text{.......... (1)}$$

$$x = \frac{x^3 - 20}{3} \qquad \text{.......... (2)}$$

$$x = \frac{20}{x^2 - 3} \qquad \text{.......... (3)}$$

$$x = \sqrt{(3 + \frac{20}{x})} \qquad \text{.......... (4)}$$

- Dari rumusan pertama dapat dinyatakan persamaan iterasinya sebagai

$$x_{(n+1)} = \sqrt[3]{(3x_n + 20)}$$

dengan n = 1,2,3,.....

- Jika diambil dari nilai *xo* = 1, maka:

$$x_1 = \sqrt[3]{(3 \times 1 + 20)} = 2.843867$$

- Dan seterusnya. Hasilnya dapat ditabelkan sebagai berikut

$$x_2 = \sqrt[3]{(3 \times 2.843867 + 20)} = 3.055686$$

Nilai Iterasi dari persamaan 1

iterasi	x	g(x)	Ea
1	1	2.843867	
2	2.843867	3.055686	6.931961
3	3.055686	3.078205	0.731565
4	3.078205	3.08058	0.077088
5	3.08058	3.08083	0.008122
6	3.08083	3.080856	0.000856
7	3.080856	3.080859	9.02E-05
8	3.080859	3.080859	9.5E-06
9	3.080859	3.080859	1E-06
10	3.080859	3.080859	1.05E-07

Nilai Iterasi dari persamaan 2

iterasi	x	g(x)	Ea
1	1	-6.33333	
2	-6.33333	-91.3457	93.06663
3	-91.3457	-254070	99.96405
4	-254070	-5.5E+15	100
5	-5.5E+15	-5.4E+46	100
6	-5.4E+46	-5E+139	100
7	-5E+139		
8			
9			
10			

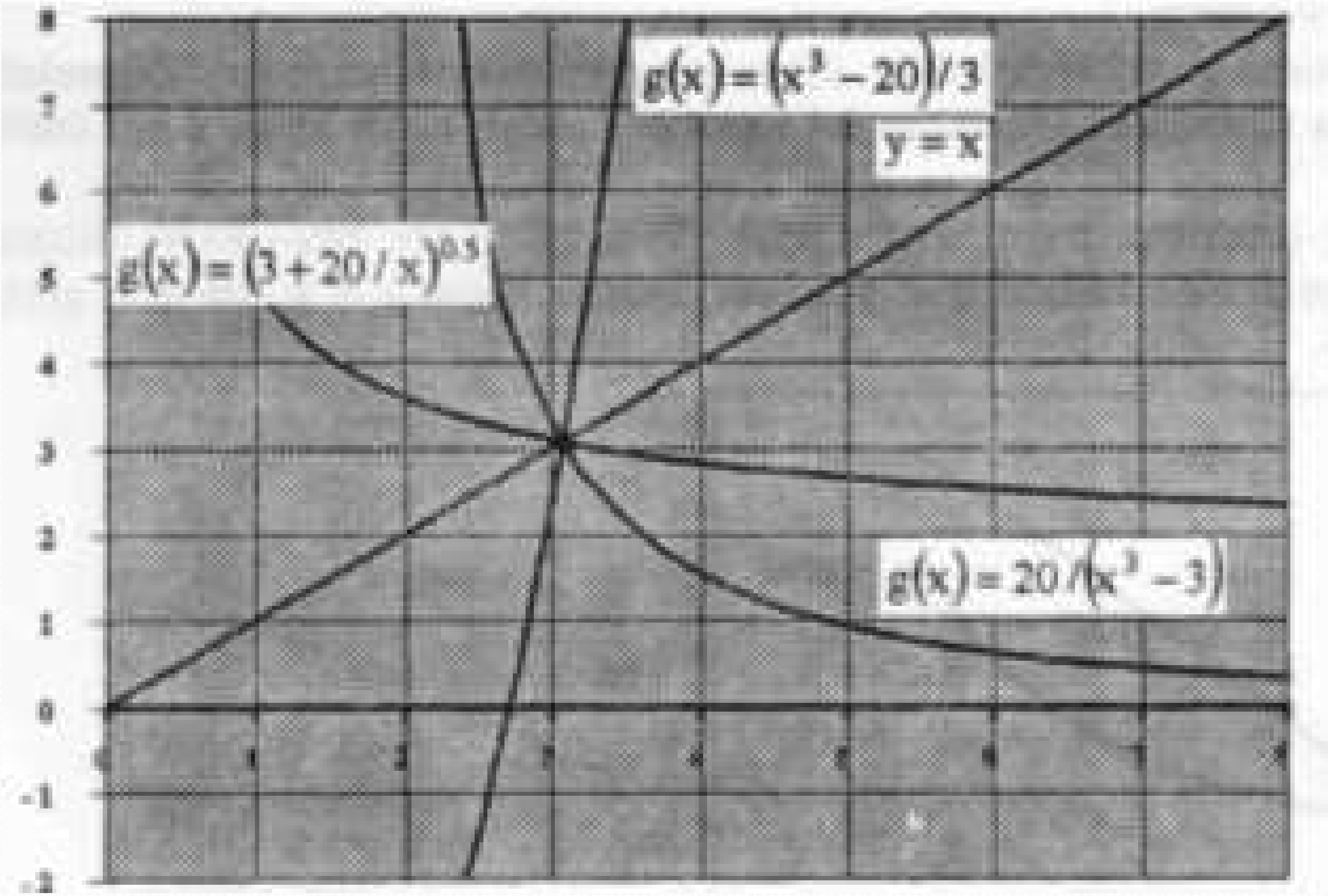
Nilai Iterasi dari persamaan 3

iterasi	x	g(x)	Ea
1	1	-10	
2	-10	0.206186	4950
3	0.206186	-6.7625	103.049
4	-6.7625	0.46804	1544.854
5	0.46804	-7.19182	106.508
6	-7.19182	0.41049	1852.007
7	0.41049	-7.0634	105.8115
8	-7.0634	0.426516	1756.071
9	0.426516	-7.09702	106.0098
10	-7.09702	0.422229	1780.847

Nilai Iterasi dari persamaan 4

iterasi	x	g(x)	Ea
1	1	4.795832	
2	4.795832	2.677739	-79.1
3	2.677739	3.235581	17.24086
4	3.235581	3.030061	-6.78272
5	3.030061	3.098472	2.207889
6	3.098472	3.074865	-0.76773
7	3.074865	3.082913	0.26104
8	3.082913	3.080158	-0.08944
9	3.080158	3.081099	0.030566
10	3.081099	3.080777	-0.01045

- Dari hasil di atas nampaknya persamaan 2 dan 3 memberikan hasil yang tidak konvergen. Persamaan 4, seperti halnya persamaan 1, mampu memberikan nilai akar yang kita cari.



g(x) = (x^3 - 20)/3
y = x
g(x) = (3 + 20/x)^0.5
g(x) = 20/(x^2 - 3)

Dengan meneliti grafik tampak bahwa bagi cara 2 dan 3, garis singgung $y = g(x)$ lebih tajam daripada garis singgung $y = x$ dekat nilai akar; sedangkan pada cara 1 dan cara 4, garis singgung $y = g(x)$ tidaklah setajam garis singgung $y = x$ dekat nilai $x = 3$. ini berarti nilai absolut $g'(x) < 1$ di dekat nilai akar. Dengan demikian, konvergensi dari solusi metode iterasi dapat dilacak dari perilaku turunan pertama fungsi.

Algoritma program dengan metode Iterasi

a). Tentukan X_0, toleransi, dan jumlah iterasi maksimum.

b). Hitung $X_{baru} = g(X_0)$.

c). Jika nilai mutlak $(X_{baru} - X_0) < $ toleransi, diperoleh tulisan x_{baru} sebagai hasil perhitungan;jika tidak, lanjutkan ke langkah berikutnya.

d). Jika jumlah iterasi > iterasi maksimum, akhiri program.

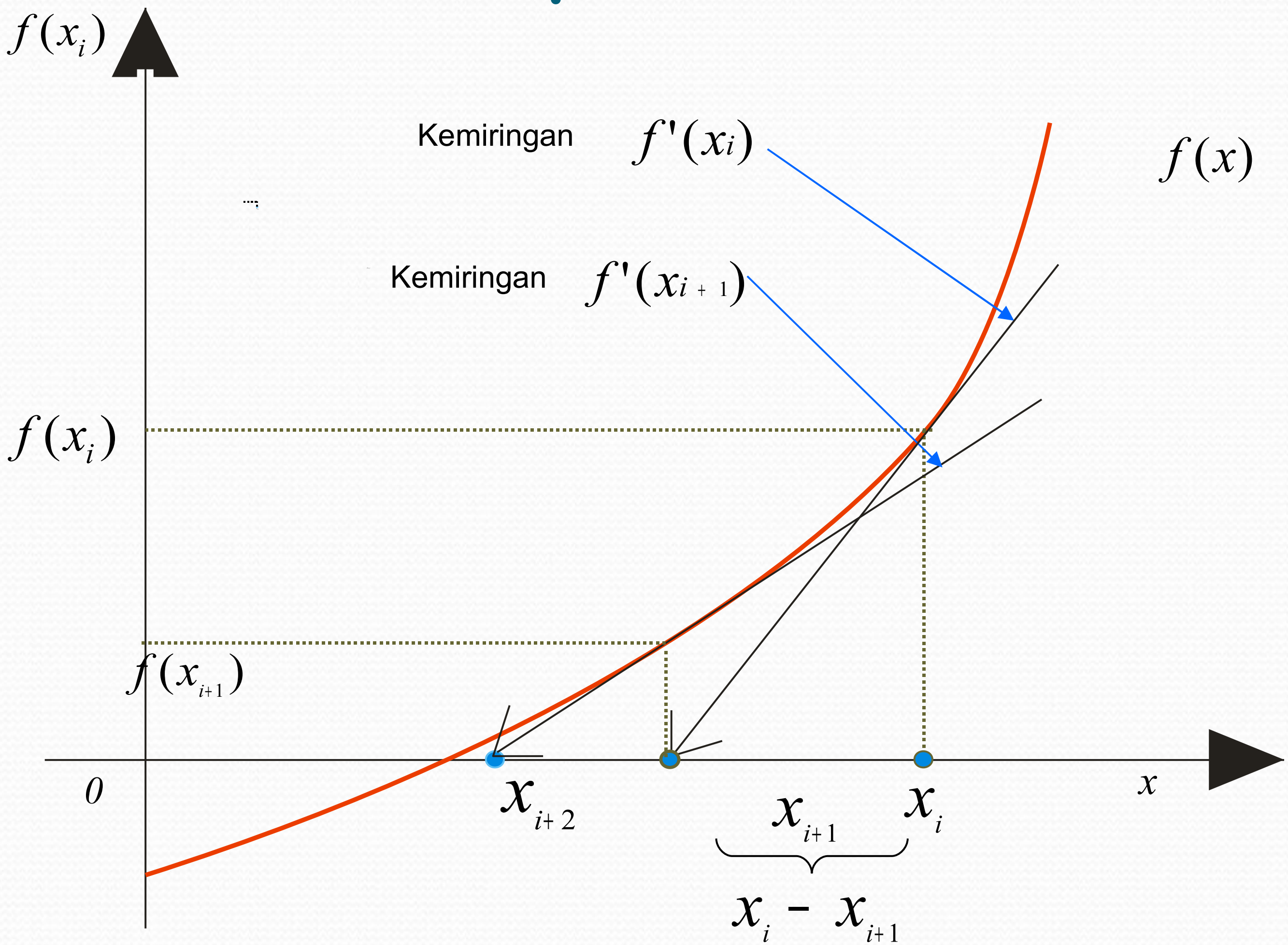
e). $X_0 = X_{baru}$, dan kembali ke langkah (b).

Metode Newton-Raphson

Pengertian

- Salah satu metode *penyelesaian akar-akar* persamaan non linier $f(x)$, dengan menentukan satu nilai tebakan awal dari akar yaitu x_i

Grafik Pendekatan Metode Newton-Raphson



Langkah-langkah penyelesaian Metode Newton-Raphson

Langkah 1

Cari *f'(x)* dan *f''(x)* dari *f(x)*

Langkah 2

Tentukan titk x_0 dan *Uji* sesuai : $\left|\frac{f(x_0).f''(x_0)}{f'(x_0).f'(x_0)}\right| < 1$

Apakah memenuhi syarat persamaan?
Jika tidak, cari nilai x_o baru.

Langkah 3

Lakukan *iterasi* dengan persamaan : $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Contoh Soal:

Pernyataan Masalah:

Gunakan Metode *Newton-Raphson* untuk menaksir akar dari :

$$f(x) = e^{-x} - x$$

menggunakan sebuah tebakan awal $x_0 = 0$.

Solusi :

- **<u>Langkah 1:</u>**

  Turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x) = e^{-x} - x$ dapat dievaluasikan sebagai :

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} - 1 \\ f''(x) &= -e^{-x} \end{aligned}\right\} \quad x_0 = 0$$

- **Langkah 2:**

Lakukan uji syarat persamaan

$$f(x_0) = -e^{-0} - 0 = 1$$

$$f'(x_0) = -e^{-0} - 1 = -2$$

$$f''(x_0) = -e^{-0} = -1$$

$$\left| \frac{f(x_0).f''(x_0)}{f'(x_0).f'(x_0)} \right| < 1$$

$$\left| \frac{1.(-1)}{(-2).(-2)} \right| < 1$$

$$\left| -\frac{1}{4} \right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < 1$$

memenuhi syarat persamaan, sehingga akar-akarnya dapat dicari dengan metode Newton-Raphson

- **Langkah 3:**
  Lakukan Iterasi dengan :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Akar x akan semakin akurat, jika nilai $f(x)$ semakin mendekati 0

Iterasi, i	x_i	$f(x_i)=e^{-x}-x$	$f'(x_i)=-e^{-x}-1$
0	0	1	-2
1	0,500000000	0,106530659	-1,60653066
2	0,566311003	$1{,}304510116 \times 10^{-3}$	-1,567615513
3	0,567143165	$1{,}96536 \times 10^{-7}$	-1,567143362
4	0,567143290	$6{,}43 \times 10^{-10}$	-1,567143291

akar x_4

$f(x_4)$ *dekat dengan harga* $\mathbf{0}$

- Contoh

$f(x) = x^3 - 3x - 20$, maka $f1(x) = 3x^2 - 3$

Dengan demikian $x_{k+1} = x_k - (x^3_k - 3x_k - 20) / (3x^2_k - 3)$.

Perkiraan awal xo = 5

Maka:

f(5)=53-3.(5)-20 =90

f'(5)=3(5)2-3 =72

xbaru=5-(90/72)=3.75

iterasi	X_k	X_{k+1}	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$F(x_{k+1})$
1	5	**3.75**	90	72	21.484375
2	**3.75**	3.201754	21.48438	39.1875	3.216661132
3	3.201754	**3.085854**	3.216661	27.75369344	0.127469447
4	**3.085854**	3.080868	0.127469	25.5674865	0.000229985
5	3.080868	3.080859	0.00023	25.47525192	7.53268E-10

Kelemahan
Metode Newton-Raphson

1. Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar (titik) penyelesaian, akar-akar penyelesaian tersebut tidak dapat dicari secara bersamaan.
2. Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner).
3. Tidak bisa mencari akar persamaan yang tidak memenuhi persyaratan persamaannya, meskipun ada akar penyelesaiannya.
4. Untuk persamaan non linier yang cukup kompleks, pencarian turunan pertama dan kedua f(x) akan menjadi sulit.

Algoritma

- Tentukan Xo, toleransi, dan jumlah iterasi maksimum.
- Hitung Xbaru = x - $f'(x_0)/f(X_0)$.
- Jika nilai mutlak $(X_{baru} - X_0)$ < toleransi, diperoleh tulisan xbaru sebagai hasil perhitungan;
- jika tidak, lanjutkan ke langkah berikutnya.
- Jika jumlah iterasi > iterasi maksimum, akhiri program.
- $X = X_{baru}$, dan kembali ke langkah (b).

Pseudocode

(Matlab style)

```
es=eo                              % initialize error stopping criteria with some value eo
xr=xo                              % initialize the root with some value xo
iter =0                            % initialize the iteration counter
ea=999                             % initialize the relative error
% Begin iteration loop
while ea<es                        % test to see if relative error is less then stopping criteria
   xrold = xr                      % update old value of root
   xr=xrold-f(xrold)/f'(xrold)     % calculate new root
   iter=iter+1                     % update the iteration counter
   if xr ~= 0                      % update absolute relative error
      ea=abs((xr-xrold)/xr)*100    % calculate relative error
   end
end
root=xr                            % final error
```

```
ALGORITMA akar_pers_metode_terbuka

        DEKLARASI
function PersIterasi(input XI: real)→real
XR, XN, ES, EA : real;
i, IM : integer

        DESKRIPSI
read(XR, ES, IM)
i←1
while i≤ IM do
        XN←PersIterasi(XR)
        if XN←0 then
        XR←XN
                        else
                        EA←abs((XN-XR)/XN)*100
                        if EA≤ES then
                        write(XN, EA, i)
                        i←IM+1
                        endif
                        XR←XN
        endif
        i←i+1
endwhile
        if i=IM+1 then
        write('tidak ditemukan akar');
```

PRAKTIKUM MINGGU DEPAN

- Buatlah program untuk mencari akar persamaan $f(x)=-0{,}875x^2+1{,}75x+2{,}625$ dengan iterasi satu titik sederhana dan metode Newton-Raphson. Gunakan perkiraan akar pertama 3,1 dan toleransi kesalahan 0,001%
- Buatlah sebuah *function* dari persamaan di atas untuk mengecek apakah akar (x) yang diperoleh dari langkah pertama sudah menghasilkan $f(x)=0$
- Amati hasil program dengan 2 metode yang berbeda tersebut, tuliskan analisa anda dalam laporan.