M A T R I K S

Oleh:

Dimas Rahadian AM, S.TP. M.Sc

Email: rahadiandimas@yahoo.com

JURUSAN ILMU DAN TEKNOLOGI PANGAN
UNIVERSITAS SEBELAS MARET
SURAKARTA

DEFINISI...

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk jajaran segi empat siku-siku yang diatur berdasa Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut <u>entri</u> dari matriks atau <u>elemen</u> atau <u>unsur</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

ORDO MATRIK...

ORDO (ukuran) **suatu matriks dinyatakan dalam banyaknya <u>baris</u> (arah horizontal) dan banyaknya <u>kolom</u> (arah vertikal).**

Suatu matriks *A* dengan ukuran *m* x *n* ditulis:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn} = \lfloor a_{ij} \rfloor$$

Entri pada baris dan kolom dalam matriks *A* juga biasa dinyatakan dengan simbol $(A)_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat ditulis $(A)_{11} = 1$, $(A)_{12} = -2$, $(A)_{21} = ?$, $(A)_{22} = ?$

...JENIS MATRIKS

Matriks Bujur Sangkar / Persegi

Matriks bujursangkar adalah matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Jika jumlah baris = jumlah kolom = *n*, maka disebut matriks bujursangkar berorde *n*.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

...JENIS MATRIKS
Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua entri-entrinya sama dengan nol

$$\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Sifat-sifat matriks nol:

1. $A + 0 = 0 + A = A$
2. $A - A = 0$
3. $0 - A = -A$
4. $A0 = 0A = 0$

...JENIS MATRIKS
Matriks Satu / Vektor Satu

Matriks satu adalah matriks yang semua entri-entrinya sama dengan satu

$$[1] \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

...JENIS MATRIKS
Matriks Baris dan Matriks Kolom

<u>Matriks baris</u> didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun tepat satu <u>baris</u>

<u>Matriks kolom</u> didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun tepat satu <u>kolom</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

...JENIS MATRIKS
Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua entri di luar diagonal utama sama dengan nol. Dengan perkataan lain, (a_{ij}) adalah matriks diagonal jika (a_{ij})=0 untuk i≠j

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

...JENIS MATRIKS
Matriks Segitiga Atas dan Bawah

Matriks segitiga atas adalah matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utama sama dengan nol.

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utama sama dengan nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 7 & 0 \\ 3 & 9 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

...JENIS MATRIKS
Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang semua entri pada diagonal utama sama dengan satu dan entri lainnya adalah nol.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks identitas biasa ditulis *I* atau I_n di mana *n* menunjukkan ukuran matriks bujursangkar tersebut.

Sifat matriks identitas adalah seperti bilangan 1 (satu) dalam operasi-operasi dengan bilangan biasa, yaitu jika A adalah matrik sebarang, maka

AI = IA = A.

...MATRIKS TRANSPOSE

Jika adalah matriks berukuran *m* x *n*, maka *transpose dari A* (ditulis A^T), adalah matriks *n* x *m* yang diperoleh dari *A* dengan mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Carilah matriks transpose dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 7 & 0 \\ 3 & 9 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

Sekaligus menjadi bukti bahwa transpose dari matriks segitiga bawah merupakan matriks segitiga atas, dan sebaliknya.

...KESAMAAN MATRIKS

JIKA:

$$\begin{bmatrix} x & x+y \\ y-z & 2z-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Maka $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j

Dengan demikian nilai w,x,y dan z dapat ditentukan

LATIHAN !

a. Tentukan nilai $(z+y) \times 3(x-w) - z^3$!

b. Tentukan nilai $z^2 + (y-x)^2 - w + 9$!

...OPERASI MATRIKS
Penjumlahan dan pengurangan

Jika dua matriks *A* dan *B* memiliki ukuran sama, maka kedua matriks tersebut dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Penjumlahan *A* + *B* adalah menjumlahkan entri-entri pada matriks *A* dengan entri-entri yang bersesuaian pada matriks *B.*

Pengurangan *A* – *B* adalah matriks mengurangkan entri-entri pada matriks *A* dengan entri-entri yang bersesuaian pada matriks *B*. Dikatakan pula mengurangi matriks *A* dengan matriks *B*, yaitu *A* – *B*, adalah menjumlahkan matriks *A* dengan –*B*. Jadi *A* – *B* = *A* + (–*B*).

Matriks-matriks dengan ukuran berbeda tidak dijumlahkan atau dikurangkan.

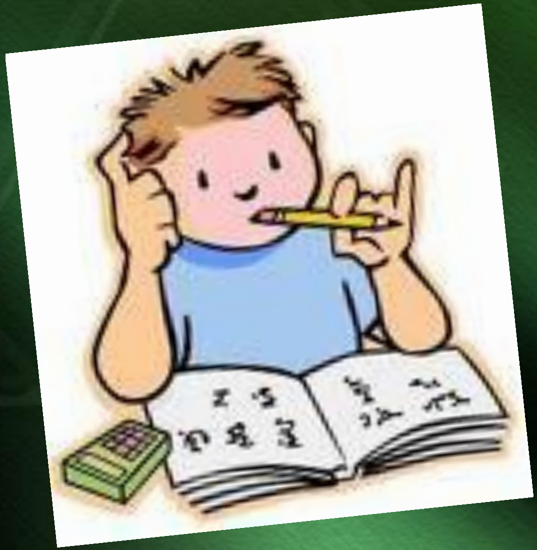
...LATIHAN

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 17 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

TENTUKAN !

a. A+B
b. B+A
c. A-B
d. B-A

e. (A+A)+B
f. A+(A+B)
g. A+C
h. B+C



Sifat Penjumlahan dan Pengurangan Matriks:

- **Jika *A, B,* dan *C* adalah matriks-matriks berukuran sama, dan *k* skalar, maka**
  1. $A + B = B + A$ **(komutatif)**
  2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(asosiatif)**
  3. $k(A + B) = kA + kB$ **(distributif)**
  4. **Selalu ada matriks *D* sedemikian sehingga** $A + D = B$

...OPERASI MATRIKS
Perkalian Skalar dengan Matriks

.

Jika *A* adalah sebarang matriks dan *k* adalah sebarang skalar, maka perkalian *kA* adalah mengalikan setiap entri pada matriks *A* dengan bilangan *k*.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

TENTUKAN !

a. 2B
b. 3A
c. 3B+3C
d. 3(B+C)

...OPERASI MATRIKS
Perkalian Matriks dengan Matriks

- Perkalian dua matriks *A* dan *B*, yaitu *AB*, dapat dilakukan **jika jumlah kolom dari matriks *A* sama dengan jumlah baris dari matriks *B*.**

- Jika $A=(a_{ij})$ adalah matriks berukuran *m* x *r* dan $B=(b_{ij})$ adalah matriks berukuran *r* x *n*, maka perkalian *AB* adalah suatu matriks $B=(c_{ij})$ berukuran *m* x *n* dimana entri ke-*ij* berasal dari perkalian baris ke-*i* dari matriks *A* dengan kolom ke-*j* dari matriks B yang kemudian dijumlahkan

...LATIHAN

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 17 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

TENTUKAN !

a. AB
b. BA
c. AC
d. CA
e. ABC
f. BCA
g. CBA
h. A(AB)
i. (AA)B

Jika A, B, dan C adalah matriks-matriks yang memenuhi syarat-syarat perkalian matriks yang diperlukan, maka:

1. $A(B + C) = AB + AC$; $(B + C)A = BA + CA$ (distributif)
2. $A(BC) = (AB)C$ (asosiatif)
3. $AB \neq BA$ (tidak komutatif)
4. Jika $AB = 0$, di mana 0 adalah matriks nol, yaitu matriks yang semua elemennya sama dengan nol, maka ada tiga kemungkinan:
   (i) $A = 0$ dan $B = 0$
   (ii) $A = 0$ atau $B = 0$
   (iii) $A \neq 0$ dan $B \neq 0$
5. Bila $AB = AC$, belum tentu $B = C$

...DETERMINAN

Setiap matriks bujursangkar *A* selalu dihubungkan dengan suatu skalar yang disebut ***determinan*** dari matriks tersebut. Determinan dari matriks *A* ditulis

det(A) atau │A│

...MENCARI DETERMINAN MATRIKS 2x2

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ **maka determinan dari matriks *A* mengikuti anak panah berikut:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dengan det(A)=$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

...LATIHAN

CARILAH DETERMINAN DARI MATRIKS BERIKUT !

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

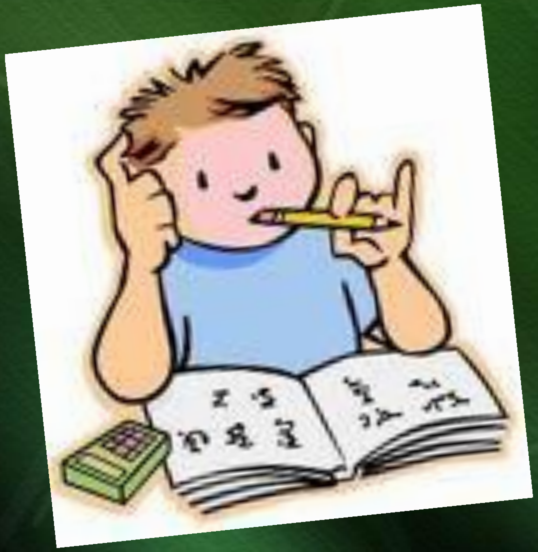
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$



...MENCARI DETERMINAN MATRIKS 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka determinan dari matriks *A* mengikuti anak panah berikut:

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

dengan det(A)= $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

...LATIHAN

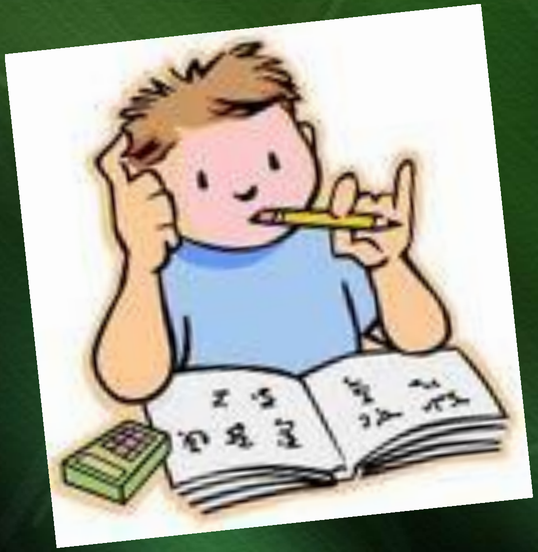
CARILAH DETERMINAN DARI MATRIKS BERIKUT !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



...INVERS MATRIKS

- Jika *A* adalah matriks bujursangkar, dan terdapat matriks *B* yang memiliki ukuran sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka *A* disebut matriks yang mempunyai ***invers*** (*invertible*) dan *B* disebut sebagai invers dari *A*.

...CONTOH

JIKA:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

DAN:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

MAKA DAPAT DIPASTIKAN BAHWA *B* ADALAH INVERS DARI *A* ATAU BIASA DITULIS A^{-1}

BUKTI

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

...MENCARI INVERS MATRIKS 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ ***mempunyai invers apabila ad-bc≠0***

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

...LATIHAN

CARILAH INVERS DARI MATRIKS BERIKUT !

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

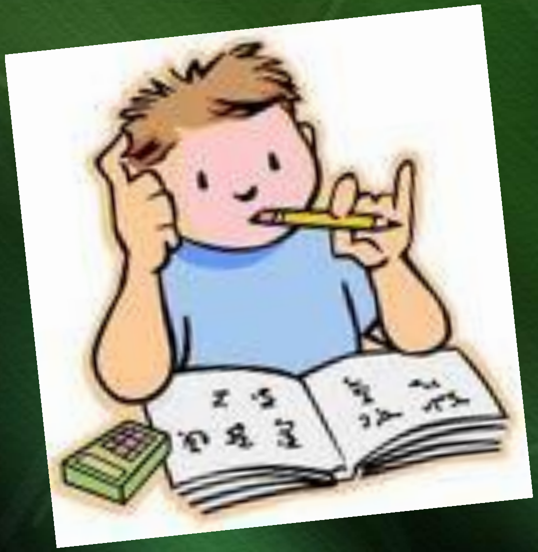
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$



...MENCARI INVERS MATRIKS BUJUR SANGKAR SECARA UMUM

Untuk matriks bujursangkar secara umum, invers dari matriks tersebut dapat dicari dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE). Misal *A* adalah matriks bujursangkar sebarang. Pada matriks *A* tersebut dilakukan serangkaian OBE sedemikian sehingga menjadi matriks identitas *I*. Selanjutnya, pada matriks *I* juga dilakukan serangkaian OBE yang sama, sehingga akan diperoleh matriks A^{-1}.

$$\left[A : I\right] \xrightarrow{\text{OBE}} \left[I : A^{-1}\right]$$

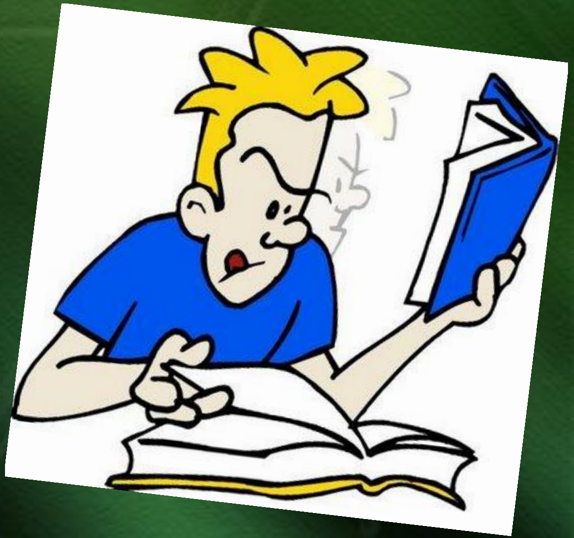
...CONTOH

Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

JAWAB:

$$[A : I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{B_3 - 2B_1}{\sim}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 + 3B_2$$

$$\sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & : & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2/5 & -3/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - 2B_2$$

$$\sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2/5 & -3/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - 3B_3$$

$$\sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1/5 & -1/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2/5 & -3/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$\left[I : A^{-1} \right]$$

... PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN MATRIKS DAN OBE

Carilah *x* dan *y* apabila

$x+2y=5$ dan $2x+5y=12$

a. dengan metode subtitusi

b. dengan metode OBE

Penyelesaian dengan OBE :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix} \overset{B_2 - 2B_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{B_1 - 2B_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jika dikembalikan ke SPL maka:

1x+0y=1 → x=1

0x+1y=2 → y=2

Sehingga didapatkan x=1 dan y=2

...LATIHAN

Selesaikan dengan OBE !

1.
$$x + 2y + z = 6$$
$$x + 3y + 2z = 9$$
$$2x + y + 2z = 12$$

2.
$$2x - 6y + 7z = 1$$
$$4y + 3z = 8$$
$$2z = 4$$

3.
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1$$
$$-3x_1 + x_2 - 2x_3 = -7$$
$$5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$$

SELAMAT BELAJAR !